١٨

Mngool.com

أصول
تدريس الرياضيات

الطبعة الثالثة: منقحة، مجددة، مزادة

الأستاذة الدكتورة

نظلة حسن أحمد خضر

PH. D. (LONDON)

كلية التربية - جامعة عين شمس

الطبعة الثالثة

١٩٨٥

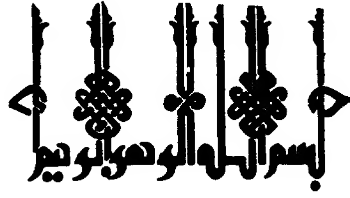
الناشر

مكتبة الأنجلو المصرية

الإهداء

فكرت لحظة فى إهداء هذا الكتاب إلى الله كنوع من الشكر والعرفان بالجميل . وسألت د . الهلالى عيد فى ذلك فقال لى « الهدية لا تهدى ، فهو الذى أهداه إليك » .





« ... الحمد لله الذى هدانا لهذا وما كنا لنهتدى لولا أن هدانا الله ... »

تقديم الطبعة الثالثة

صدرت الطبعة الأولى لهذا الكتاب منذ حوالى عشر سنوات ، والطبعة الثانية منذ ست سنوات إقتصرنا فيها على تصويب أخطاء مطبعية .

أما فى إعداد الطبعة الثالثة فقد راعينا أن تعكس الطبعة الجديدة اهتمامات عالمية ومحلية فى مجال تدريس الرياضيات أثيرت فى السنوات العشر الماضية ، وأن تطعم بأجزاء جديدة لازمة لإعداد معلم المستقبل ظهرت دلالتها من خبرتنا فى تدريس المادة والاشراف على رسائل علمية ومن تطور المادة نفسها .

ومن ثم جاءت الطبعة الثالثة مزادة حوالى ٣٥٪ ، ومعدلة ومنقحة فى أجزاء الطبعة الأولى مع الإضافة والحذف . كما اشتملت على إضافة باب بأكمله عن تدريس تطبيقات الرياضيات (والرياضيات المطبقة) بقصد إبراز النواحى النفعية والجمالية للرياضيات فى المجالات المختلفة بجانب تقديم الكمبيوتر (الحاسب الآلى) كأحد التطبيقات العصرية وتدريس برمجة الكمبيوتر بلغة البيسك .

أما الاضافات فى الأبواب المختلفة فمنها : تدريس المهارات الرياضية ، تطور الرياضيات المطبقة والتوبولوجى ، تدريس الطريقة البديهية فى البرامج المطورة ، الاشارة إلى أساليب جديدة فى تعلم الرياضيات ، تدريس الهندسة الاقليدية بأسلوب بديهى مبسط ، أنواع التقويم . كما أضيف ملحق يشمل فئات بديهيات الهندسة الاقليدية : للنظام البديهى الأصلى لاقليدس ، لنظام هيلبرت ونظام بيرخوف الحديثين .

وأخيراً أرجو أن يكون فى هذه الطبعة الجديدة ما يشبع حاجة معلم الرياضيات وبخاصة معلم المرحلة الاعدادية أو السنوات الأخيرة من التعليم

الأساسى، وما يفيد المختصين بتدريس وتطوير الرياضيات فى المراحل المختلفة وبتطوير إعداد معلم الرياضيات، وما يرجوه الباحثون فى مجال تدريس الرياضيات .

وما توفيقى إلا بالله،،،

يناير ١٩٨٥

★★★

تقــديم الطبعة الأولى

نحاول فى هذا الكتاب عرض بعض جوانب أصول تدر يس الر ياضيات بما يتمشى مع الاتجاهات الحديثة . والكتاب يتناول بعض المبادىء الأساسية فى تدر يس الر ياضيات بصفة عامة وبما يخص تدر يس ر ياضيات المرحلة الإعدادية بصفة خاصة . ومن خلال عرض الأبواب المختلفة قدمنا الأفكار والمواضوعات الحديثة التى لها دلالة حيو ية فى تدر يس الر ياضيات وتعلمها لنساعد على إثراء ثقافة المدرس العلمية والمهنية والعامة بما يصقل و ينمى خبرته فى الاتجاهات السليمة . ولما كنا بشأن تطو ير مناهج الر ياضيات وإدخال الر ياضيات الحديثة فى المراحل المختلفة ، فقد راعينا فى تدر يس (أو بالأحرى فى إستراتيجيات تدر يس) ر ياضيات المرحلة الإعدادية أن نطعمها بالأفكار والإتجاهات الحديثة حتى يقف القارىء (الدأرس) على دلالة الر ياضيات الحديثة وطرقها فى توضيح المفاهيم التقليدية أو إصلاح عيوبها من جهة ، ومن جهة أخرى تشجيعه على تبسيط مفاهيم الر ياضيات الحديثة (التى يدرسها أو يعرفهـــا) واستخدامها كوسائل لتوضيح الأسس الر ياضية السليمة التى تبنى عليها ر ياضيات المرحلة الإعدادية وغيرها .

ومن ثم فقد كان الإعتبار الرئيسى فى معالجة موضوعات الكتاب هو الإهتمام بتوضيح الأسس (الأصول) المختلفة حتى يستطيع المدرس أن يبنى و يطور تدر يسه على اسا ر علمى سايم .

وقد حاولت المؤلفة أن تودع الكتابة خلاصة خبرتها فى تدر يس مادة طرق تدر يس الر ياضيات وفى تدر يس موضوعات أساسية فى الر ياضيات الحديثة مثل هندسة المسلمات (أصول الهندسة الحديثة) والتوبولوجى لطلبة كلية التر بية وغيرها . وترجو المؤلفة أن يجد فيه طلبة وطالبات كليات التر بية فى أقسام الر ياضيات بعض الفائدة . كما تتطلع المؤلفة إلى مدرسى الر ياضيات والموجهين آملة أن يجدوا فى المادة العلمية ما قد يكون ذا نفع لهم فى عملهم التر بوى .

وتتقدم المؤلفة بالشكر لكل من ساعدها وشجعها على تأليف هذا الكتاب وتخص الشكر الأستاذ الدكتور الدمرداش سرحان لرعايته الطيبة ، والأستاذ الدكتور أحمد زكى صالح لمناقشاته المثمرة (وأذكر يوماً سألته لماذا تؤلف ؟ هل أنت راضى عن

مـؤلـفـاتـك ؟ ... فـقـال لى وكأنه عرف ما وراء أسئلتى إبدئى فى التأليف مافيش حد بيبدأ من الكمال) ، والأستاذ الدكتور إبرهيم شهاب لمساعدته الفائقة وتشجيعه المستمر ، والأسـتـاذ الدكتور سعد مرسى لتشجيعه المستمر ولآرائه البناءه فى إخراج الكتاب (وهو الذى إقترح تغيير إسم الكتاب من مبادىء فى تدر يس الر ياضيات إلى أصول تدر يس الر يـاضـيـات) . كما تخص بـالشكر الزميله إحسان شعراوى لمناقشاتها العلمية المثمرة والـزمـيـل خـلـيـل المـهـدى لـتشجيعه المستمر ، والدكتور مهندس الهلالى محمد أحمد عيد لـتوجيهاته العلمية والفنية والفلسفية وللمجهود الذى بذله فى مراجعة أصول الكتاب وفى توفير كل الأسباب للتأليف .

والله ولى التوفيق ..

نوفبر ١٩٧٣ المؤلفه

****

المحتويات

الموضوع		الصفحة

الموضوع — الصفحة

قائمة الرمــوز المستخدمة :

$\ni$	ينتمى إلى
$\not\ni$	لا ينتمى إلى
$\sqsupset$	فئه جزئيه من
$\sqcup$	اتحـــــاد
$\sqcap$	تقاطـــــع
{ أ ب ، حـ ، ى }	فئة عناصرها ا ، ب ، حـ ، ى
ϕ	الفئة الخالية
$\backsim$	نــفى
$\Leftarrow$	رمز التضمين المنطقى « بما إن إذاً »
$\vee$	رمز الوصل المنطقى « أو »
$\wedge$	رمز الوصل المنطقى « و »
$\Leftarrow\Rightarrow$	إذا وإذا فقط
$>$	أقل من
$\not>$	ليست أقل من
$\overline{\text{أ ب}}$	قطعة مستقيمة ا ب
∢ ا ب حـ	زاو ية ا ب حـ
$\cong$ أو $\equiv$	يطابـــق
$\overleftarrow{\text{م ن}}$	متجه م ن
$\underline{\text{أ}}$	متجه أ
‖ أ ‖	طول المتجه أ
ت (أ ، ب ، حـ ، ى)	بُعد أ عن ب يساوى بعد حـ عن ى
ت (أ ، ب ، حـ)	النقط ا ، ب ، حـ مستقيمة ، ب تقع بين النقطتين ا ، حـ
p($\overline{\text{أ ب}}$)	طول القطعة المستقيمة ا ب
أَ ، بَ ، حـَ	أضلاع المثلث اب حـ التى تقابل الزوايا ا ، ب ، حـ على الترتيب
ح	فئة الأعداد الحقيقية
أ+	عدد موجب

$^{-}$أ	عدد سالب
(س ، ٥)	**تركيب المجموعة**
(س ، ت)	تركيب التوبولوجى (الفراغ التوبولوجى)

★★★

المقـــدمة

تـدريس الـرياضـيـات مهنة ممتعة وصعبة . وتستمد متعتها وصعوبتها من طبـيـعـة الـرياضـيات ووضعها بالنسبة للعلوم الأخرى وطبيعة المتعلم ونظرته إليها . والـتـدريس كأى مهنة يحتاج إلى معرفة وفن . وتتمثل المعرفة بالنسبة لتدريس الرياضيات ما يخص الرياضيات نفسها (أى الأساسيات اللازمة التى يجب أن يلم بها المدرس) وهى معرفة تخصصيه ، وما يخص دور الرياضيات فى الحياة العلمية التكنولوجية المعاصرة أو ما يخص تطور الرياضيات عبر التاريخ وأثره وتأثره بالنمو الحضارى وهى معرفة عامة ، وما يخص أهداف التربية وسيكلوجية التعلم وطبيعة المتعلم وأساليب التدريس وهى معرفة تربوية أو مهنية . أما الفن فى التدريس فيتمثل فى إختيار المادة المناسبة مع الطريقة المناسبة فى ضوء الهدف المنشود بما يتلاءم وطبيعة المتعلم . وإذا كانت المؤسسات التربوية الخاصة بإعداد المدرس تمده بالمعرفة على أنواعها التخصصية والمهنية فإن الخروج إلى الحياة العملية يمده بالخبرة بما يصقل و ينمى فن التدريس من جهة وإثراء ثقافته من جهة أخرى . وهذا لا يتأتى إلا إذا كان المدرس يحب الرياضيات و يسعد بتدريسها وعنده الرغبة والمقدرة فى الاستمرار فى دراسة الرياضيات ، وقراءة المنشورات الحديثة بما يتعلق بالرياضيات وتدريسها وقراءة الأبحاث التربوية التى تخصه فى عملية التدريس كما يكون لديه حب التجريب والتطوير .

وتتدخل فى عملية تدريس الرياضيات عوامل كثيرة إلا أن هيكلها يتحدد بدورات ، كل دورة منها تشتمل على :

١ ــ الأهداف .
٢ ــ المحتوى .
٣ ــ الإستراتيجية .
٤ ــ الطريقة .
٥ ــ التقويم .

فتبدأ عملية التدريس بمحاولة المدرس تكوين أو إختيار الأهداف الخاصة بتدريس الرياضيات وهى تنبع من الفلسفة العامة للمجتمع ودور المدرسة كمؤسسة إجتماعية تحقق الغايات التربوية الخاصة بإعداد الفرد ، وما يتفق مع طبيعة الرياضيات الموجودة فى المنهج وطبيعة المتعلم . ثم تترجم هذه الأهداف إلى مواقف تعليمية وسلوكية لتحقيقها . وتحديد الأهداف يوضح للمدرس ما هى المفاهيم والأفكار الرياضية التى يجب أن يعرفها المتعلم ، ما هى المهارات التى يجب أن يكتسبها ، وما هى الإتجاهات التى تتكون عند المتعلم . وهذه توجه المدرس إلى إختيار المفاهيم والمهارات التى يجب أن تنمى من جهة ومن جهة أخرى إلى دراسة كيفية غرس أو تحسين طرق التفكير ومعرفة أساليب البرهنة وحل المشكلات ، إذ أن مادة الرياضيات ليست فقط مفاهيم وعلاقات وقوانين ولكن تتضمن تحليل مشكلات ، برهنة نظريات ، تطبيقات ، تعميمات وتكوين تركيبات رياضية .

ثم تأتى الخطوة التالية وهى إختيار المحتوى المناسب وهو الخاص بالأفكار الرياضية والتركيبات الرياضية والتدريبات التى تحقق الأهداف . ولعرض هذا المحتوى يختار المدرس الإستراتيجية المناسبة التى تحدد طريقته فى التدريس . فهى تحدد الأسلوب الرياضى فى التنظيم المنطقى لعرض المادة بما يتمشى مع المبادىء التربوية والسيكلوجية فى خلق الدوافع وفهم طبيعة المتعلم وهى تحدد أيضاً نوع الدرس . فقد يكون نوع (أسلوب أو تكنيك) الدرس هو طريقة معمل و يقوم التلميذ فيه باجراء بعض التجارب وعمل بعض القياسات أو يكون الدرس قائما على استخدام الوسائل السمعية والبصرية مثل استخدام الأفلام وغيرها ، أو يكون الدرس قائما على الأنشطة التى يقوم بها التلميذ فى اكتشاف المفاهيم والأفكار المختلفة بنفسه ، أو يكون درس إثراء معرفة ، أو درس يقوم فيه التلاميذ بالدراسة الذاتية المستقلة ، أو درس ينقسم فيه التلاميذ إلى مجموعات يعهد إلى بعض أو أحد التلاميذ إلى توجيهها ، أو درس يستخدم فيه التعليم المبرمج أو التعليم التكنى ، أو الكومبيوتر (وهذا يستخدم فى نطاق ضيق بالخارج) ، أو يكون درس تقليدى .

وعموما فاستراتيجية تدريس مفهوم (أو موضوع) رياضى ما هى إلا الإجراءات التى يستخدمها المدرس فى تعامله أو تدريسه لهذا المفهوم . فمثلا عند تدريس النظم العدية يختار المدرس الإجراءات المناسبة عن طريق الإجابة على أسئلة مثل :

هل يستخدم المدخل التاريخى ؟ — هل يستخدم أنظمة عدية مختلفة فى آن واحد ؟ إذا استخدم نظام عدى بأساس ما فأى أساس يختار؟ هل سيقدم عمليات مثل الضرب والقسمة واستخراج الجذور على هذه الأنظمة ؟

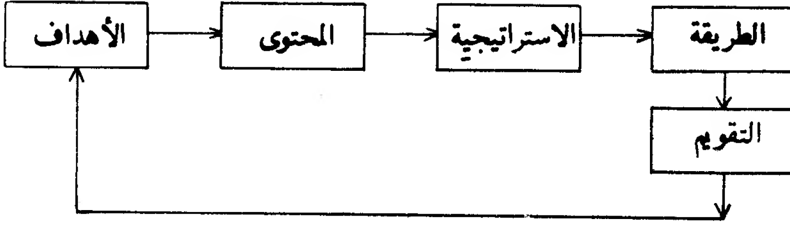
وتعتمد الاستراتيجية التى يختارها المدرس على الموضوع والفصل والأهداف والإجراءات أو المداخل المختلفة التى يعرفها المدرس . وقد يكون من المناسب استخدام استراتيجية مختلفة عند تدريس موضوع مرة ثانية أو عند مراجعته فهذا يعطى حياة للموضوع .

وعموما فنحن نقصد بإستراتيجية تدريس موضوع طريقة تقديم الموضوع ككل أو المدخل الرياضى له .

طريقة التدريس تعتبر دالة للاستراتيجية أو تطبيق لها وهذه الطريقة تحدد بدورها المواد التعليمية (مثل الطباشير، الكتاب المدرسى ، كتب إثراء معرفة ، أدوات الرسم ، مسطرة حاسبة ، وسائل قياس ، أدوات معمل ، وسائل ، أفلام ، أجهزة ، مصباح سحرى . .) التى نستخدمها فى التدريس .

وطريقة التدريس الشائعة فى الماضى والحاضر هى نوع الدرس التقليدى : مناقشة الواجبات المنزلية، مناقشة الدرس الجديد ، تعيين التمارين والواجبات إلا أن البعض قد يجدد فى الطريقة باستخدام أنواع الدروس والمواد المختلفة التى ذكرناها سابقاً .

والخطوة الأخيرة فى عملية التدريس هى التقويم ليقف المدرس على مواطن القوة والضعف فى طريقته و برنامجه التعليمى . وبذلك يحدد ما هى الأهداف التى حققها والأهداف التى لم يستطيع تحقيقها . وعلى أساس التقويم يخطط لدورة أخرى كما تبين خريطة السير فى شكل (١) .



شكل (١)

وسنقدم فى الباب الأول من هذا الكتاب فكرة عن أهداف تدريس الرياضيات . أما عن كيفية تحقيقها فهو محور الأبواب المختلفة حيث نناقش العوامل التى تتدخل فى عملية التدريس حتى التقويم . ونحاول من خلال عرض الأبواب المختلفة أن نقدم الأفكار والمواضيع الحديثة التى لها دلالة حيوية فى تدريس الرياضيات وتعلمها لنساعد على إثراء معرفة المدرس المهنية والعامة بما يساعده على ثقل خبرته . ولما كنا بشأن تطوير مناهج الرياضيات وإدخال الرياضيات الحديثة فى المراحل المختلفة فقد راعينا فى تدريس (أو بالأحرى فى استراتيجيات تدريس) رياضيات المرحلة الإعدادية أن نطعمها بالأفكار والاتجاهات الحديثة ، وذلك حتى يقف القارىء (الدارس) على دلالة الرياضيات الحديثة وطرقها فى توضيح المفاهيم التقليدية أو إصلاح عيوبها من جهة ومن جهة أخرى تشجيعه على تبسيط مفاهيم الرياضيات الحديثة (التى يدرسها أو يعرفها) واستخدامها كوسائل لتوضيح الأسس السليمة التى تبنى عليها رياضيات المرحلة الإعدادية وغيرها .

ومن ثم فقد كان الإعتبار الرئيسى فى معالجة مواضيع الكتاب هو الاهتمام بتوضيح الأسس المختلفة ودلالتها حتى يستطيع المدرس أن يبنى ويطور تدريسه على أساس علمى سليم .

فالثورة الرياضية التى هى أساس التطور فى معظم أنواع العلوم والمعرفة ناتجة من الدراسة النقدية والبحث فى أساسيات وأصول الرياضيات ومحاولة وضعها على أساس أكثر تجريداً وصلابة يحتمل نمواً وتطوراً أكبر . ولما كان التدريس منذ أقدم العصور يساير تطور المعرفة ، فقد كان لزاما على القائمين

بشئون التربية والتدريس العناية بدراسة وتقدير أهمية أساسيات (أصول) المواد المختلفة حتى يمكن بناء جيل خلاق يستطيع أن يشارك فى نمو وتطور الحياة وفى مجابهة عالم ذو علاقات غير متوقعة. وليس جيل كما يقول عنه برنارد شو (فى وصف جيله): «يبدو أن الجميع يعرفوا و، لا، ى (x,y,z) عن الموضوع، ولكن لا أحداً منهم يعرف ا، ب، حـ، (a,b,c) منه».

وعلى ذلك فقد حاولنا توضيح بعض أساسيات الرياضيات (مفاهيم، علاقات، قواعد، تركيبات، المنطق والبرهان) وكيفية تكوينها فى ذهن التلاميذ خلال العرض فى الأبواب ١، ٢، ٣، ٤؛ والأساسيات الخاصة بطرق التفكير الرياضية وحل المشكلات فى الأبواب ١، ٣، ٤؛ والأسس السيكلوجية فى تعلم الرياضيات فى الأبواب ٣، ٤؛ والأسس التربوية فى الأبواب ١، ٣، ٦، ٧.

وقد ناقشنا فى الباب الأول أهداف تدريس الرياضيات ومنها أهداف تتعلق بفهم أساسيات المادة؛ وأهداف تتعلق بغرس و بتحسين طرق التفكير وحل المشكلات، وأهداف تختص بتنمية المهارات، وأهداف تتعلق بتذوق الجمال الرياضى وتقدير وحب الرياضيات؛ وأهداف تتعلق باكتساب أو تكوين العادات، والاتجاهات والميول. وقد حاولنا توضيح أهمية هدف فهم أساسيات المادة فى تحقيق الأهداف الأخرى. وتفسير معنى الفهم كعملية تكوين المفهوم (أو القاعدة أو التركيب) فى ذهن التلميذ عن طريق تكوين المفاهيم والعلاقات الأولية الأساسية له والتى يتبين (فى هذا الباب والباب الثالث) أنها مفاهيم أساسية فى الرياضيات الحديثة يمكن تكوينها بالطرق التى تساعد على الإكتشاف، وكذلك تفسير الفهم على أن له مستويات تتوقف على مستوى نمو التلميذ وخبراته السابقة.

وفى الباب الثانى من خلال عرض نبذة عن تاريخ الرياضيات ناقشنا أهمية تاريخ الرياضيات بالنسبة لمدرس الرياضيات، وأوضحنا تطور الرياضيات فى العصور المختلفة. وتفاعله مع (تأثيره فى وتأثره من) التطور الحضارى فى هذه العصور، كذلك بينا بعض الرياضيين الذين أسهموا فى

تطور الر ياضيات . وتضمنت مناقشاتنا تقديم فكرة عن الر ياضيات الحديثة والرياضيات المطبقة وجذورها فى تاريخ الرياضيات وذكر بعض الموضوعات الرئيسية المعاصرة فيها مع إعطاء فكرة عن حتمية تدريسها فى المراحل المختلفة والأساس فى ذلك .

وفى الباب الثالث وضحنا الأسس السيكلوجية الحديثة فى تعلم الر ياضيات عن طر يق مناقشة أبحاث بياجيه الخاصة بنمو المفاهيم الر ياضية للعدد والفراغ والقياس والمنطق ، ثم ناقشنا نتائج أبحاث بياجيه وتطبيقاتها فى التر بية بصفة عامة وفى تطو ير المناهج وطرق تدر يس الر ياضيات بصفة خاصة ، مع ذكر أمثلة لتدر يس بعض الموضوعات بما يتمشى مع أفكار بياجيه . وقد بينا أهمية ودلالة المفاهيم الأولية فى الر ياضيات الحديثة كمفاهيم أساسية لفهم أساسيات الر ياضيات التقليدية منها أو الحديثة . و بينا كذلك الطرق الحديثة فى التدر يس التى تعتبر من تطبيقات أبحاث بياجيه فى تدر يس الر ياضيات والنابعة من الهدف الأساسى للتر بية الذى وضحه بياجيه : « هدف التر بية ليس فقط العمل على ز يادة المعلومات ولكن العمل على مساعدة التلميذ بكل الطرق الممكنة ليخترع و يكتشف بنفسه . ويختص التدر يس بخلق الظروف التى تساعد على إكتشاف التركيبات (التكو ينات) ولا يختص بالمرة بنقل التركيبات التى يمكن أن تستوعب على مستوى لغوى فقط » .

وفى الباب الرابع قمنا بتطبيق النتائج المستخلصة من الأبواب الثلاثة الأولى فى تدر يس (أو بالأحرى فى إستراتيجيات تدر يس) أساسيات ر ياضيات المرحلة الإعدادية و بالاستعانة بالأفكار والاتجاهات الحديثة الأخرى فى هذا الشأن . وشمل تدر يس الجبر الموضوعات الآتية : الأعداد الموجهة . التعبيرات والقوانين الجبر ية ، الكسور الجبر ية ، المعادلات ، الرسم البيانى ، حل المشكلات الجبر ية . وشمل تدر يس الهندسة تدر يس المفاهيم الهندسية عن طر يق هندسة التحو يلات ؛ النظام البديهى والبرهان الاستدلالى ، تدر يس الهندسة الاقليدية على أساس بديهى مبسط ، تدر يس

الهندسة العملية (الإنشائية) ووسائل فى تدريس الهندسة . وقد حاولنا فى هذا الباب تكوين الأساس الرياضى السليم للأساسيات المختلفة ومناقشة المداخل المختلفة لبعض الموضوعات مما يساعد على تدعيم الأساس الرياضى للقارىء .

وفى الباب الخامس تناولنا تدريس تطبيقات الرياضيات . وتقديم تطبيقات واقعيه تبين النواحى الجمالية والنفعية للرياضيات . واعطاء فكرة عن الكمبيوتر (الحاسب الالكترونى) كأحد التطبيقات التى أثرت فى النمو الحضارى وتدريس برمجة المكبيوتر بلغة البيسك .

وفى الباب السادس وضحنا أهداف التقويم فى الرياضيات مع مناقشة أنواع التقويم والاختبارات كذلك إعطاء أمثلة لاختبارات موضوعية على مستوى المرحلة الإعدادية .

وفى الباب السابع ناقشنا بعض المشكلات فى التربية العملية أو المشكلات التى يمكن أن يقابلها المدرس المبتدىء فى مهنته . وشملت المناقشة مشكلات حفظ النظام ، التخطيط وإعداد الدروس والروتين المدرسى .

ويتضمن الملحق الأول معايير لدراسة ونقد كتب الرياضيات يمكن للطالب أو المدرس أن يستعين بها على تقييم الكتاب المدرسى فى الرياضيات بصفة عامة وكتب الرياضيات الحديثة بصفة خاصة وليتعرف المدرس من خلالها على مواصفات الكتاب المدرسى الجيد . أما الملحق الثانى فيتضمن البديهيات الأصلية للهندسة الاقليدية لاقليدس ومجموعات البديهيات الحديثة للهندسة الاقليدية : لهيلبرت و بيرخوف .

البـــاب الأول

١ ــ أهداف تدريس الرياضيات

من المتفق عليه أن الهدف الأساسى من تدريس الرياضيات بصفة عامة هو: المساهمة فى إعداد الفرد للحياة العامة بصرف النظر عن عمله أو تطلعاته فى المستقبل من ناحية ومن ناحية أخرى المساهمة فى إعداد الفرد لمواصلة دراسته فى الرياضيات نفسها أو فى موضوعات أخرى أثناء وجوده فى المدرسة وبعد تخرجه منها .

إلا أنه توجد محاولات أخرى عديدة لتفسير هذا الهدف ، فمثلا اقترح فى مؤتمر عالمى (فى معهد اليونسكو بهامبورج) الأهداف التالية :

١ ــ فهم المادة المقررة فى المنهج و يعنى ذلك إدراك المفاهيم والعلاقات الموجودة بينها وفهم التركيب الرياضى .

٢ ــ تقبل القيم الجمالية فى الرياضيات مثل التمتع بالتجريب فى المواقف الرياضية . وفى برهنة نظرية عممت من التجارب أو المتعة الناشئة من اكتشاف الأنماط وحل المسائل (المشكلات) ... الخ

٣ ــ فهم الرياضيات على أنها موضوع مفتوح دائم النمو والتغيير.

٤ ــ التعرف على دور لغة الحياة اليومية فى وصف الأفكار الرياضية وبالتالى معرفة العناصر الأولية فى علم المنطق .

٥ ــ تنمية قدرة الطالب على دراسة الرياضيات بنفسه وبصفة عامة قدرته على تعليم نفسه .

٦ ــ فهم التفكير القياسى أو الإستدلالى فى الرياضيات .

٧ ــ القدرة على فهم النماذج الر ياضية والتعامل بها أو بمعنى آخر فهم تطبيقات الر ياضيات فى الحياة اليومية .

وفى مؤتمر المعلمين العرب السادس لتدر يس الر ياضيات الحديثة أقترح أن يهدف تدر يس الر ياضيات فى البلاد العر بية فى جميع المراحل إلى ما يأتى :

١ ــ تكو ين الأساس الر ياضى الحديث من مفاهيم وحقائق ومصطلحات ورموز وأساليب معالجة أساسية . مما يعطى المواطن ثقافة ر ياضية شاملة و يضع اللبنات التى يمكن أن تقوم عليها دراسته فى المراحل التعليمية التالية .

٢ ــ إبراز مفهوم البناء الر ياضى المشيد على نظام المسلمات (المصادرات) والتأكيد على المفاهيم التى تعمل على التوحيد بين الفروع المختلفة للر ياضيات على خطوط جبر ية ، وتوبولوجية . هذا إلى جانب استخدام الأسلوب الاستدلالى فى جميع الفروع .

٣ ــ إبراز أن مجال الدراسة الر ياضية يشتمل على المؤكدات كما يشتمل على الاحتمالات وعلى المضبوطات وكذلك على المقر بات وأن الهدف من دراسة العمليات الر ياضية ليست فقط الوصول إلى نتائج هذه العمليات بل إلى التعرف على أساليب معالجة وطرق الوصول إلى نتائج هذه العمليات .

٤ ــ إدراك أن الر ياضيات مادة حية ومتجددة يمكن أن يشارك التلميذ فى صنعها وإكتشاف العلاقات الكامنة فيها وابتكار براهين لتعميماتها وأن الحقيقة الر ياضية هى حقيقة نسبية تعتمد أساسا على الفروض والمسلمات التى بنيت عليها .

٥ ــ إكتساب المهارة فى معالجة المشكلات الكمية وتحليل البيانات الإحصائية بذكاء ووعى .

٦ ــ إظهار دور الر ياضيات فى الإسهام فى حل مشكلات التنمية فى الوطن العر بى .

٧ ــ الإسهام فى تكو ين الاستعداد العلمى المدرك لمشاكل الحياة والمخطط لمحاولة حلها بأحسن الطرق وأيسرها .

٨ ــ تنمية القدرة على الكشف والابتكار وتعويد التلميذ على عملية التجريد والتعميم .

٩ ــ إكتساب اتجاهات وعادات اجتماعية سليمة مثل الموضوعية فى التفكير والدقة فى التعبير والقدرة على التنظيم والعمل الهادف واستخدام أساليب التخطيط والتصميم فى حل المشكلات الرياضية وغير الرياضية .

١٠ ــ تكوين ميول عند التلاميذ نحو تذوق الرياضيات والإستزادة من دراستها وسير أغوارها حتى يمكن خلق جيل عربى من الرياضيين والباحثين العلميين .

١١ ــ إبراز أهمية الرياضيات ليس فقط فى العلوم الطبيعية بل أيضا فى العلوم الاجتماعية والسلوكية والاقتصادية واللغات وغيرها من الأنشطة الإنسانية .

والمحاولتان السابقتان لوضع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات متقاربتان ومتداخلتان إلى حد ما . إلا أنه حتى يسهل دراسة مثل هذه الأهداف وترجمتها إلى أهداف خاصة (لكل مرحلة أو موضوع أو درس) ليمكن تحقيقها سنبوبها فى مجموعات كما يأتى :

المجموعة (أ) : أهداف تتعلق بفهم أساسيات الرياضيات ، أى بفهم المفاهيم والعلاقات والقواعد (والقوانين) الرياضية والتركيب الرياضى وطبيعة البرهان .

المجموعة (ب) : أهداف تتعلق بغرس أو تحسين طرق التفكير الرياضية وحل المشكلات . أى طرق التفكير الاستقرائية والاستدلالية والطرق الخاصة بالاكتشاف الرياضى وأساليب حل المشكلات .

المجموعة (حـ) : أهداف تتعلق بتنمية المهارات .

المجموعة (د) : أهداف تتعلق بتذوق الجمال الرياضى وتقدير وحب الرياضيات لتركيبها الذاتى ، أو لتطبيقاتها فى الحياة ، أو لدورها فى الحياة التقدمية العصرية أو لنموها الزائد المستمر ، أو من المتعة فى تجريبها واكتشافها .

المجموعة (هـ) : أهداف تتعلق بتكوين العادات والاتجاهات السليمة من تعلم الرياضيات ، فمثلا تكوين عادات مثل عادة الدقة فى التعبير، وعادة التفكير المنطقى فى حل المشكلات وخلق الاعتماد على النفس ، وعادة الدراسة الذاتية ليتمكن الفرد من متابعة الدراسة معتمداً على نفسه ، وعادة تطبيق المعلومات الرياضية فى الحياة العملية وحل مشاكلها عن طريق النماذج الرياضية . وتكوين اتجاهات مثل الثقة فى الرياضيات ، الولاء للرياضيات والرياضيين ، احترام الفرد لتحصيله فى الرياضيات بنفسه أو عن طريق غيره ، السعادة والرضا فى دراسة الرياضيات ، حب الاستطلاع للأفكار الرياضية .

والترتيب الذى وضعنا فيه هذه المجموعات من الأهداف العامة ليس ترتيباً للأفضلية فحسب فجميعها تتكامل وتتداخل وتساعد بعضها البعض لتحقق الهدف الأساسى من تدريس الرياضيات . ولكن نلاحظ أن تحقيق أهداف المجموعة (أ) ضرورى لتحقيق أهداف المجموعات الأخرى . فالتلميذ الذى يفهم أساسيات الرياضيات لابد أن يعرف طرق التفكير الخاصة بالبرهان ، والذى يفهم أساسيات المادة تتولد فيه حب واحترام المادة و يتحلى بالصفات التى توفرها الرياضيات لدارسيها كما أنه يحب متابعة دراستها .

ونلاحظ أنه مما يساعد على تحقيق هدف يعود على مساعدة تحقيق هدف آخر كما أنه يمكن تحقيق هدف واحد عن طريق موضوعات وطرق مختلفة . فمثلا تحقيق هدف فهم التركيب الرياضى يحقق هدف تذوق وتقدير الجمال الرياضى لتركيب الرياضيات الذاتى أو لتطبيقاتها . وفهم التركيب الرياضى يمكن أن يتحقق عن طريق دراستنا للمنطق الرياضى أو النظم العددية أو التركيبات الجبرية أو التركيبات القياسية وغير القياسية أو هندسة المسلمات أو ... الخ .

وفيما يلى نوضح المقصود بالأهداف العامة المبوبة فى المجاميع السابقة ونناقش كيفية تحقيقها .

١.١ــ المجموعة (أ) أهداف تتعلق بفهم أساسيات الرياضيات (المفاهيم، والقواعد، والتركيبات، وطبيعة البرهان.)

يرى البعض أن المقصود بفهم [1] أساسيات الرياضيات هو إدراك أو معرفة أو تمييز أو ذكر المعلومات الرياضية الأساسية: المفاهيم والعلاقات والقواعد والقوانين واستعمالها، وإجراء الحسابات، وبرهنة النظريات، العناصر والتعريفات والبديهيات لتركيب رياضى ما وبرهنة نظريات فيه. لكننا نرى أن كل هذا ضرورى. ولكن ليس كافيا. ففهم الأساسيات المختلفة هو عملية تكوين هذه الأساسيات فى ذهن الفرد. وهو يتطلب معرفة «كيف، ولماذا» أو بالأحرى معرفة أساس ودلالة ما يتعلمه الفرد.

ونعنى بالأساس المفاهيم والعلاقات والقوانين والخواص الرياضية البسيطة التى تعتبر أولية للمفهوم أو القاعدة أو النظرية أو التركيب أو.... التى نود أن يفهمها التلميذ أى يكونها فى ذهنه. ولا يأتى الفهم عن طريق نقل المعلومات ولكن عن طريق إتاحة الفرصة للتلميذ لكى يكتشف (أو يعيد بناء) المعلومات الرياضية وأساسياتها بنفسه وسنناقش على هذا الأساس فهم القواعد، والمفاهيم، والتركيب الرياضى، وطبيعة البرهان.

فبالنسبة للقاعدة (القانون أو الخاصية) الرياضية، نجد أن التلميذ الذى يعرف القاعدة واستخدامها و يصل بها إلى الإجابة الصحيحة لا يعنى ذلك أنه يفهم ما يعمله أو يكون لديه فكرة عن المفاهيم الأساسية (الأولية) للقاعدة. فمثلا عند قسمة كسر على كسر يقوم التلميذ بضرب الكسر الأول فى مقلوب الكسر الثانى و يصل إلى الإجابة الصحيحة دون أن يدرى السبب فى ذلك ولكن فهم هذه القاعدة يتطلب تكوين القاعدة فى ذهن التلميذ عن طريق تكوين المفاهيم الأساسية (الأولية) لها وهى:

---

(١) وقد ذكر البعض على وجه التحديد: «الفهم من الناحية السيكولوجية هو إدراك العلاقات القائمة فى موقف يجابه الفرد وإدراك ذلك الموقف ككل مترابط»، «الفهم من الناحية العملية هو التكيف الناجح لموقف يجابه الفرد وهذا التكيف الناجح لا يأتى إلا نتيجة لفهم العلاقات القائمة فى الموقف وتمييز العناصر الرئيسية فيه».

(١) العملية ومعكوسها (عملية الضرب معكوس عملية القسمة) .

(٢) العنصر المحايد فى عملية الضرب .

(٣) خاصية ضرب بسط ومقام كسر فى عدد $\neq$ صفر لا يغير من قيمة الكسر . وكما نرى بعض هذه المفاهيم الأولية للقاعدة تعتبر مفاهيم أولية فى الرياضيات الحديثة . ونلاحظ أنه بفهم التلميذ لهذه القاعدة وأساسها نجد أنه لا يقع فى خطأ قلب الكسر الأول بدلا من الكسر الثانى كما أنه لا يستطيع أن يوسع و يطبق معلوماته فى قسمة وضرب أكثر من كسرين .

وبالنسبة للمفهوم الرياضى نأخذ مثالا لمفهوم العدد . فالتلميذ الذى يعرف العدد ويميزه عن غيره أو يقوم بالعد لا يدل ذلك على فهمه لمفهوم العدد . فالعدد مفهوم مركب يتطلب فهمه معرفة مفاهيم أساسية مثل الفئات المتكافئة ، التناظر الأحادى ، وعلاقة الترتيب . وعامة عملية الفهم هى عملية تكوين المفهوم فى ذهن التلميذ عن طريق تكوين المفاهيم والعلاقات الأولية الأساسية له ، والتى تبين (من أبحاث بياجيه كما سنذكر فى الباب الثالث) أنها مفاهيم أساسية فى الرياضيات الحديثة يمكن تكوينها بالطرق التى تساعد على الإكتشاف .

وبالنسبة لفهم التركيب الرياضى ، لا يعنى معرفة الطالب بالتركيب الرياضى وخصائصه (مسميات وعلاقات أو عمليات أولية ، بديهيات ، نظريات مشتقة بحيث تتوفر فيها التآلف والاستقلال والتصنيف) فقط بفهمه لها . ولكنه يلزمه معرفة أهمية ودلالة العلاقة بين مكوناتها وخصائصها . فمثلا يلزمه معرفة ماذا يحدث لو أن النظام غير متآلف أو غير مستقل أو غير مصنف ، وإذا كان غير مصنف كيف نجعله مصنفا .

وعلى ذلك لابد أن يفهم التلميذ أساس ما يتعلمه حتى يستطيع أن يوسع ويخلق تركيبات جديدة حتى تساعده على التعميم والتطبيق والتذكر بوجه عام .

وبالنسبة لفهم طبيعة البرهان ، لا يلزم التلميذ فقط معرفة طرق البرهنة المختلفة والتميز بينها ليفهم طبيعة البرهان . ولكن فهم طبيعة البرهان يتطلب

أيضا معرفة أسسه المنطقية وكيفية تطبيقه ليس فقط فى الهندسة ولكن فى الجبر، التفاضل والتكامل ، والاحتمالات ، .... مع معرفته لدلالة وأهمية برهان الوجود و برهان الوجدانية . وقبل أن نتكلم عن المقصود بطرق (أنواع) البرهنة ، والأسس المنطقية للبرهان ، نود أن نوضح أن الفهم (أو إعادة تكوين الأساسيات فى ذهن التلميذ أو اكتشافها) تعبير نسبى يتوقف على المفهوم أو الخاصية الرياضية من جهة وعلى مستوى التلميذ من جهة أخرى فمثلا لفهم أن :

كمية سالبة × كمية سالبة تنتج كمية موجبة [أى (— س) × (— ص) = + س ص] لتلميذ مرحلة ابتدائية أو مبكراً فى المرحلة الاعدادية ، ربما يكون اعطاء معنى ملموس للكميات السالبة والموجبة كاف لأن يستنتج التلميذ القاعدة . أو يمكن استنتاجها عن طريق الاكتشاف من أنماط مثل :

	—٥	—٥	—٥	—٥	—٥	—٥	—٥	—٥	—٥
	٤	٣	٢	١	صفر	—١	—٢	—٣	—٤
بالضرب	—٢٠	—١٥	—١٠	—٥	صفر	؟	؟	؟	

أما بالنسبة لسن متقدمة عندما يكون التلميذ مهيأ ومستعداً للاستنتاج المنطقى فان فهمه لأساس القاعدة أو القانون يتطلب معرفته للبرهان المنطقى لها فمثلا

إذا كانت أ ، ب ∈ ح (أى للعددين الحقيقيين أ ، ب)

سيكون :

— أ (صفر) = صفر   خاصية الصفر

— أ [(ب + (— ب)] = صفر

(— أ) × ب + — أ × — ب = صفر

وحيث أن   (— أ) × ب = — أ ب   (نظرية) فإن

— أ ب + (— أ) × (— ب) = صفر ⇐ لابد أن يكون

— أ × — ب المعكوس الجمعى للكمية — (أ ب)

أى أن   — أ × — ب = أ ب

فيما يلى نقدم فكرة عن الأسس المنطقية للبرهان الاستدلالى وطرق البرهنة :

لقد أدى التركيز على استخدام الطريقة البديهية الحديثة إلى التركيز على توضيح وفهم الأسس المنطقية للبرهان الاستدلالى ، و يتطلب البرهان الاستدلالى استخدام أنماط معينة من المناقشات (والحجج) لتكوين تقارير (جمل) مركبة (أى مجمعة) من تقارير أخرى عن طريق استخدام العمليات المنطقية حتى يمكن الوصول إلى نتائج سليمة . ونوضح أولا هنا المقصود بالتقارير والعمليات المنطقية :

التقرير: اى جملة خبرية ذات معنى تحتمل الصواب والخطأ تسمى تقريراً وقد نشير إلى التقرير بحرف . فمثلا قد نستخدم الحرف م ليدل على الجملة الرياضية أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع . أى م = أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ونقول أن التقرير له قيمة الصدق ص أو خ تبع ما إذا كان التقرير صوابا وخطأ فمثلا التقرير ٢ + ٢ = ٤ له قيمة صدق ص بينما التقرير ٢ + ٢ = ٥ له قيمة صدق خ وبمعرفة قيمة الصدق للتقارير يمكن أن نضع تقريراً محل تقرير مكافىء له .

ويمكننا تكوين تقارير مركبة من تقارير معطاه بواسطة العمليات المنطقية الآتية :

(١) النفى « ∼ » . إذا كانت م تقرير فان نفيها نرمز له بالرمز ∼ م (أى ليس أو غيرم) فمثلا إذا كانت م = مثلث متساوى الأضلاع فإن ∼ م تعنى مثلث غير متساوى الأضلاع .

(٢) التضمين « ⇐ » إذا أستنتج تقرير ن من تقرير م نقول أن م تؤدى إلى ن أو إذا كانت م فإن ن ونكتب ذلك م ⇐ ن . نسمى هذه النتيجة تضمين فمثلا س = ٢ ⇐ س^{٢} = ٤ . نلاحظ أن قيمة الصدق للجملة م ⇐ ن هى خ فقط إذا كانت م صواب ، ن خطأ فمثلا من التقرير الخطأ ٣ = ٨ نصل عن طريق البرهنة السليمة إلى النتيجة الصحيحة ١١ = ١١ .

وذلك لأن ٣ = ٨ وعن طريق الخاصية الإبدالية ينتج أن ٨ = ٣

وعن طريق استخدام الخاصية «أ = ب ، حـ = د ⇐ أ + حـ = ب + د» ينتج أن

٣ + ٨ = ٨ + ٣ أى ١١ = ١١

وكذلك من التقرير الخطأ ٣ = ٨ نصل عن طريق البرهنة السليمة إلى النتيجة الخطأ ٧ = ١٢

ذلك لأن من ٣ = ٨ وعن طريق خاصية التماثل للعدد ٤ ينتج أن ٤ = ٤ وباستخدام الخاصية «أ = ب ، حـ = د ⇐ أ + حـ = ب + د» ينتج أن

٣ + ٤ = ٨ + ٤ تؤدى إلى ٧ = ١٢

أى فى الحالتين السابقتين م ⇐ ن صواب عندما م خطأ ، ن خطأ أو صواب .

(٣) الربط « ∧ » . التقرير الذى يربط التقريرين م ، ن بواو العطف (أى التقرير م والتقرير ن) نشير إليه م ∧ ن ويسمى الربط «و» قيمة الصدق للتقرير م ∧ ن هى صواب فقط عندما يكون كل من م ، ن صواب نشير أيضا إلى « ∧ » بعملية الضرب المنطقى

(٤) الربط « ∨ » التقرير م أو التقرير ن نشير إليه م ∨ ن ويسمى الربط «و» وقيمة الصواب للتقرير م ∨ ن هى خطأ فقط عندما يكون كل من م ، ن خطأ نشير أيضا إلى « ∨ » بعملية الجمع المنطقى .

ويسمى التقريران م ، ن متكافئان إذا كان كل منها يؤدى إلى الآخر ويكتب ذلك م ⇔ ن والتقارير التى تتضمن «إذا وإذا فقط» ، أو «الشرط الضرورى والكافى» هى من نوع م ⇔ ن فمثلا أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ⇔ أ ب ≡ ب حـ ≡ حـ أ وتسمى الرموز ∼ ، ∧ ، ∨ ، ⇐ ، ⇔ رموز الربط (أو الوصل) المنطقية .

والجدول الآتى (١) يبين قيم الصدق لتقارير مختلفة مركبة . ويسمى مثل هذا الجدول بجدول الصواب والخطأ :

م	ن	∼م	∼ن	م ⇐ ن	م ∧ ن	م ∨ ن	م ⇔ ن
ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	خ	ص	خ
خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ	ص

جدول (١)

وبتكوين جدول الصواب والخطأ يمكن الحصول على جمل متكافئة فمثلا م⇐ن تكافئ ∼ن ⇐∼م وهي التي نستخدمها في البرهان عن طريق عكس المعكوس (كما سنذكر في طرق البرهنة) . والجدول (٢) يوضح أن عكس المعكوس وهو∼ ن ⇐∼ م يكافىء التقرير م⇐ ن بينما عكس التقرير م⇐ن وهو ن ⇐م أو معكوسه∼ م ⇐∼ن لا يكافىء التقرير م⇐ن .

فإن العمودين في هذا الجدول (جدول ٢) تحت التقرير م ⇐ ن ، وعكس معكوسة التقرير∼ ن⇐∼ م نجد أنه إذا كان أحدهما ص فإن الآخر يكون ص كذلك ، وإذا كان أحدهما خ فإن الآخر يكون خ كذلك ولكن هذا غير موجود بالنسبة للأعمدة الأخرى .

م	ن	∼م	∼ن	التقرير م ⇐ ن	العكس ن ⇐ م	المعكوس ∼م ⇐ ∼ن	عكس المعكوس ∼ن ⇐ ∼م
ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص

جدول (٢)

والمثال الآتي يوضح أن م⇐ن يكافىء ∼ ن ⇐∼م في حين أن العكس ن⇐م أو المعكوس ∼ م ⇐∼ن لا يكافىء م⇐ن .

التقرير (نظرية) : إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين . ونرمز لذلك م⇐ن . وهذا صحيح دائما .

عكس النظرية converse	:	إذا كان المثلث متساوى الساقين فإنه يكون متساوى الأضلاع ونرمز لذلك ن ⇐ م . وهذا ليس صحيحا دائما .
معكوس النظرية inverse	:	إذا كان المثلث غير متساوى الأضلاع فإنه يكون غير متساوى الساقين . ونرمز لذلك ~م ⇐ ~ ن . وهذا ليس صحيحا دائما .
عكس معكوس النظرية contrapositive	:	إذا كان المثلث غير متساوى الساقين فإنه يكون غير متساوى الأضلاع . ونرمز لذلك ~ ن ⇐ ~م . وهذا صحيح دائما .

وتعتبر النظرية وعكس معكوسها من وجهة نظر المنطق متماثلان أو متكافئان .

ومن المبادىء الأساسية فى البرهان الاستدلالى خاصية الانتقال للتضمين المنطقى وهى :

إذا كان التقرير م (فرض — بديهة — نظرية) يؤدى إلى التقرير ن ، والتقرير ن يؤدى إل التقرير هـ فإن التقرير م يؤدى إلى التقرير هـ ونعبر عن ذلك (م ⇐ هـ ∧ ن ⇐ هـ) ⇐ (م ⇐ هـ) .

وجدول (٣) يوضح فى آخر عمود أن هذه الخاصية صواب دائما مهما كان خطأ أو صواب التقارير م ، ن ، هـ . ويسمى التقرير المركب من تقارير أخرى « تحصيل حاصل » إذا كان صوابا دائما ومستقلا عن صواب وخطأ التقارير المكونة له .

والمثال الآتى يوضح استخدام خاصية الإنتقال للتضمين المنطقى فى الجبر :

مثال : إذا كانت ٣ س + ٥ = ٢٩ فإن س = ٨

التقرير	السبب	الرمز
(١) ٣ س + ٥ = ٢٩	معطى	م
(٢) ٣ س + ٥ = ٢٩ ⇐ ٣س = ٢٤	بإضافة المعكوس الجمعى للعدد ٥ لكل من الطرفين	م ⇐ ن
(٣) ٣ س = ٢٤ ⇐ س = ٨	بضرب المعكوس الضربى للعدد ٣ فى كل من الطرفين	ن ⇐ هـ
(٤) ٣ س + ٥ = ٢٩ ⇐ س = ٨	خاصية الانتقال للتضمين المنطقى	م ⇐ هـ

م	ن	هـ	م ⇐ ن	ن ⇐ هـ	(م ⇐ ن) ∧ (ن ⇐ هـ)	م ⇐ هـ	[(م ⇐ ن) ∧ (ن ⇐ هـ)] ⇐ (م ⇐ هـ)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	ص	خ	خ	خ	ص
ص	خ	ص	خ	ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
خ	ص	خ	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص

جدول (٣)

وفي أي نظام بديهي تسمى التقارير التي تؤخذ بدون برهان بديهيات . وتسمى الجمل المركبة منها باستخدام العمليات المنطقية ـ ، ⇐ ٨ ، ٧ ، ⇔ أو أي تركيب (تجميع) آخر منها والتي نحاول بحث صحتها (صدقها أو صوابها) عن طريق طرق البرهنة بالنظريات والقوانين الرياضية،وغالبا ما نستخدم في طريق البرهنة رموز ∀ ، ∃ وهي ترمز « لكل » ، « يوجد » وتسميان دلالة الشمول والوجود على الترتيب .

طرق البرهنة (أنواع البرهان) :

في برهنة النظريات والنتائج الرياضية . نستخدم على وجه العموم أحد الطرق الآتية :

(١) البرهان المباشر . إذا كانت التقارير المستخدمة من النوع م ⇐ ن . أي باستخدام عملية التضمين المنطقي وخاصية الانتقال لها .

(٢) البرهان بعكس المعكوس . أي إثبات أن م ⇐ ن عن طريق اثبات أن ـ ن ⇐ ـ م .

فمثلا لإثبات أنه إذا كانت $أ^٢$ عدد زوجي فإن أ عدد زوجي ، نستخدم البرهان بعكس المعكوس كما يأتي :

بفرض أن م عدد فردي (أي بنفي المطلوب)

بوضع أ = ٢ ن + ١ حيث ن عدد كلي ، أي ن ∈ { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

فإن $أ^٢$ = $(٢ ن + ١)^٢$

= ٤ $ن^٢$ + ٤ ن + ١

= عدد زوجي + ١

= عدد فردي

أي أن $أ^٢$ عدد فردي وهذا يناقض المعطى الذي يقول أن $أ^٢$ عدد زوجي .

إذا لابد أن يكون أ عددا زوجيا .

و يلاحظ أنه في هذا البرهان استخدمنا نفي المطلوب ⇐ نفي المعطى .

(٣) البرهان بنفى النفى (أو ما يسمى بنقض النفى أو برهان الوحدانية uniqueness) أى إثبات أن م ⇐ ن عن طريق اثبات أن ∼ (∼ م) ⇐ ن. فمثلا لإثبات أن عنصرا ما س وحيد نفرض أن ص عنصرا آخر يحقق خواص س ثم نثبت أن س = ص. ففى هذه الحالة بدلا من اثبات أن الفرض (أو التقرير) م = س وحيدا مباشرا، فإننا نثبت ∼ (∼ م) أو ∼ (س ≠ ص) أى نثبت س = ص.

فمثلا لإثبات أن المستقيمين المختلفين ل١ ، ل٢ يتقاطعان فى نقطة واحدة على الأكثر نقول:

نفرض أن المستقيمين المختلفين ل١ ، ل٢ يتقاطعان فى نقطتين مختلفتين س ، ص.

ومن البديهية التى تقول أنه يوجد مستقيم واحد يمر بنقطتين مختلفتين.

فإن ل١ = ل٢ وهذا يناقض المعطى الذى يقول أن ل١ ، ل٢ مستقيمان مختلفان. إذ لابد أن يكون س = ص أى لابد أن يتقاطع المستقيمان المختلفان فى نقطة واحدة على الأكثر.

و بالمثل لإثبات أن العنصر المحايد و للمجموعة عنصر وحيد.

(٤) برهان الوجود. وهنا يكفى اثبات وجود حالة واحدة تحقق الشروط المعطاه. ومن نظريات الوجود. يوجد حل لعدد ن من المعادلات فى ن من المجاهيل محددة معاملاتهم ≠ صفر.

وطرق البرهنة الثلاثة الأخيرة هى طرق حديثة للبرهنة وقد قدم جاوس (١٧٧٧ ــ ١٨٥٥) برهان الوجود و برهان الوحدانية.

(٥) البرهان بالتناقض. أى اثبات أن م ⇐ن عن طريق إثبات أن م ، ∼ ن تؤدى إلى تناقض مع معلومة أو نظرية أو خاصية.

(٦) البرهان بالحذف. أى اثبات م ⇐ن عن طريق اثبات أن كل الاحتمالات ماعدا ن تؤدى إلى تناقض مع معلومة أو نظرية أو خاصية.

و يلاحظ أن البرهان بالتناقض هو حالة خاصة من البرهان بالحذف عندما يكون عدد الاحتمالات الممكنة ١.

والطريقتان السابقتان للبرهنة من الطرق القديمة التى قدمها إقليدس ونستخدمها فى برهنة بعض النظريات الهندسية فى المراحل المختلفة .

(٧) البرهان بالاستنتاج الرياضى . أى لبرهنة أن س (ن) صحيحة (أى صواب لكل قيم ن) حيث ن عدد طبيعي يكفى أن نثبت صحة س (ن) للعدد ن + ١ مع وجود س (١) . اى بلغة أخرى إذا كان س (ن) ⟸ س (ن + ١) ، س (١) موجودة وصحيحة فان س (ن) تكون صحيحة لكل عدد طبيعى ن .

فمثلا لاثبات أن مجموع المتوالية ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

هو $\text{حـ}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}}{٢}[\text{ن} + ١]$ نقول :

$$\text{حـ}(\text{ن} + ١) = \text{حـ}(\text{ن}) + \text{ن} + ١$$

$$= \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١) + \text{ن} + ١$$

$$= (\text{ن} + ١)\left[\frac{\text{ن}}{٢} + ١\right]$$

$$= \frac{\text{ن} + ١}{٢}\left((\text{ن} + ١) + ١\right]$$

وهو نفس القانون $\text{حـ}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$ بوضع ن + ١ بدلا من ن

وحيث أن حـ (١) = ١ صحيحة وموجودة

فـإن القانون $\text{حـ}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$ صحيح لكل ن

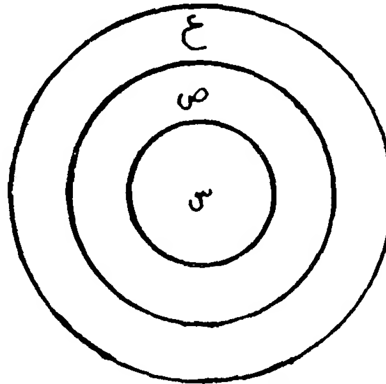
وهذه الطريقة تعد من الطرق الحديثة فى البرهان وقد قدمها بوانكريه (١٨٥٤ — ١٩١٢) ، وتعتمد هذه الطريقة فى البرهان على الحقيقة بأن الأعداد الطبيعية تتبع مبدأ الاستنتاج المحدود .

و يلاحظ أن فهم طبيعة البرهان (أسسه المنطقية وطرقه المختلفة) يمكن أن يكون على مستو يات مختلفة . و يستطيع المدرس أن يساعد التلميذ على فهم طبيعة البرهان وأسسه المنطقية بوجه عام للمستو يات المختلفة عن طريق :

(١) ربط التقارير التى تتضمن « بما أن ... إذاً » بالمنطق المستخدم فى لحياة اليومية .

(٢) توضيح خاصية إنتقال التضمين عن طريق أشكال فن . فمثلا يمكن ستخدام شكل (١) لتوضيح أن :

كل المربعات « س » مستطيلات « ص »
كل المستطيلات « ص » متوازيات أضلاع « ع »
فعلى ذلك فـإن كل المربعات « س » متوازيات أضلاع « ع » .



شكل (١)

(٣) تمكين التلاميذ من معرفة دور اللغة فى الرياضيات ، واستخدام لغة رياضية دقيقة ، ومعرفة مستو يات الدقة المختلفة .

— إعطاء التلاميذ المعلومات بصورة تقارير وإستخدام أدوات الربط المنطقية فى بنائها . والالمام ببعض التقارير المتكافئة الهامة .

- تبصير التلاميذ بدور التعاريف فى الرياضيات والطرق المثالية لتكوينها ولتكوين النظريات .
- إتاحة الفرصة للتلاميذ كى يلموا بأسس حل الجمل المفتوحة وفهمها ، خاصة المعادلات والمتباينات .

(٤) إعطاء براهين كاملة فى الجبر . واستخدام بعض التجارب والمشاهدات فى تحقيق النتائج المختلفة .

(٥) تحاشى برهنة نظريات ليس لها معنى للتلميذ ، وتحاشى برهنة نظريات كثيرة أو المطالبة بحفظ النظريات .

(٦) إعطاء فرصة للتلاميذ لكتابة البراهين البسيطة القصيرة قبل التقدم إلى البراهين الأكثر تعقيدا وصعوبة .

(٧) إعطاء الفرصة للتلاميذ كى يعرفوا الأساس فى البرهان : الاصطلاحات الأولية ـ البديهيات ـ التعاريف ـ النظريات .

(٨) توضيح البرهان باستخدام المنطق ورموزه .

(٩) تطبيق المنطق فى حل الألغاز والفوازير .

(١٠) ربط المنطق بجبر الفئات وشبكة الدوائر الكهربية لمعرفة الناحية التطبيقية للمنطق وجبر الفئات .

(١١) إعطاء الفرصة للتلاميذ لاستخدام الطرق المختلفة للبرهان ، وبيان كيفية تكوين البرهان بعكس المعكوس .

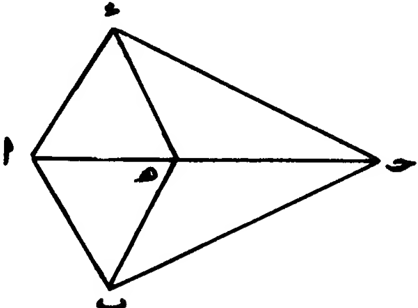
(١٢) إعطاء الفرصة للتلاميذ لكتابة البراهين بصور مختلفة . فمثلا لاثبات أن :

إذا كانت $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعة مستقيمة ، هـ نقطة بين أ ، حـ ؟

$\sphericalangle$ د حـ هـ $\equiv$ $\sphericalangle$ ب حـ هـ ، $\overline{\text{د حـ}} \equiv \overline{\text{ب حـ}}$ فإن $\overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{أ ب}}$ أنظر شكل (٢) .

يمكننا استخدام الصورة العادية فى كتابة البرهان أو أى من الصورتين الآتيتين :

الصورة الأولى : وهى موضحة فى شكل (٣)



شكل (٢)

المعطيات

ءهـ ≡ ب هـ

∡ ء هـ حـ ≡ ∡ ب هـ حـ

هـ حـ مشترك

Δ ء هـ حـ ≡ Δ ب هـ حـ

ءهـ ≡ ب هـ

∡ ء هـ ا ≡ ∡ ب هـ ا

ا هـ مشترك

Δ ا ء هـ ≡ Δ ا ب هـ

ا ء ≡ ا ب

شكل (٣)

الصورة الثانية :

بأخذ : م = (د‾حـ‾ ≡ ب‾حـ‾)

ن = (∢ د حـ هـ ≡ ∢ ب حـ هـ)

هـ = (هـ‾حـ‾ ≡ هـ‾حـ‾ أى هـ‾حـ‾ مشترك)

و = (△ د هـ حـ ≡ △ ب هـ حـ)

ز = (د‾هـ‾ ≡ ب‾هـ‾)

ح = (∢ د هـ أ ≡ ∢ ب هـ أ)

ط = (أ‾هـ‾ مشترك)

ك = (△ أ د هـ ≡ △ أ ب هـ)

ل = (أ‾د‾ ≡ أ‾ب‾)

(م ∧ ن) ∧ هـ ⇐ و

و ⇐ (ز ∧ ح) ∧ ط

و ∧ ح ∧ ط ⇐ ك ، ك ⇐ ل

باستخدام خاصية انتقال التضمين المنطقى ينتج أن :

(م ∧ ن) ∧ هـ ⇐ ل

ناقشنا فيما سبق أهداف المجموعة الأولى الخاصة بفهم أساسيات المادة وفكرة عن تحقيقها . وستتضح لنا كيفية تحقيقها بصورة أوسع خلال عرض الباب الثالث والرابع والسابع .

٢.١ ـ المجموعة (ب) : أهداف تتعلق بغرس أوتحسين طرق التفكير وحل المشكلات فى الرياضيات :

نقصد بطرق التفكير الرياضية أساليب التفكير التى تستخدم فى البرهنة ، وفى حل المشكلات (المسائل) وفى الاكتشاف الرياضى ومن هذه الطرق : التفكير الاستدلالى (الاستنتاجى) deductive ، والتفكير الاستقرائى ، والتفكير الحدسى ، والتفكير الخلاق .

والتفكير الاستدلالى هو الأسلوب الذى نستخدمه فى استخلاص نتائج من حالات عامة أى هو طرق التفكير الخاصة بالتجريد . وقد نستخدم فى التفكير الاستدلالى طرق البرهنة الاستدلالية مثل البرهان المباشر ، البرهان بعكس المعكوس ، البرهان بنفى النفى والبرهان بالتناقض والبرهان بالحذف . وتشمل طريقة التفكير الاستدلالية أيضا التفكير الخاص بتخطيط البرهان وهى ما نسميها الطريقة التركيبية والطريقة التحليلية . فمثلا فى البرهان المباشر تتمثل الطريقة التركيبية فى التفكير العادى للوصول من المعطيات إلى المطلوب عن طريق سلسلة من الحقائق (بديهيات ، نظريات ، تعريفات) والربط المنطقى بما أن . . إذاً « ⇐ » أى المعطيات ⇐ الحقيقية أ ⇐ حقيقة ب ⇐ حـ ⇐ د ⇐ المطلوب .

أما الطريقة التحليلية فهى التفكير فى البرهان فى الاتجاه العكسى بالابتداء بالمطلوب والوصول إلى المعطيات عن طريق سلسلة من الحقائق ، الربط ⇒ وهو يعنى محقق بواسطة أو مؤدى بواسطة . أى المطلوب ⇒ د ⇒ حـ ⇒ ب ⇒ أ ⇒ المعطيات . والطريقتين التركيبية والتحليلية نألفهما فى برهنة تمارين الهندسة ونستخدم الطريقة التحليلية عندما يصعب الوصول من المعطيات إلى المطلوب بالطريقة التركيبية .

والتفكير الاستقرائى (أو قد يسمى التفكير العلمى) inductive هو الأسلوب الذى نستخدمه فى اكتشاف قاعدة عامة من حالات خاصة . أى التفكير الاستقرائى هو الخاص بالتعميم من حالات خاصة . فمثلا للوصول إلى مجموع زوايا المثلث ١٨٠° درجة نرسم مثلثات مختلفة (حادة ، قائمة ، منفرجة) ونقيس مجموع زوايا المثلث فى كل حالة فاذا كان المجموع هو ١٨٠° وكانت هذه النتيجة هى نفسها التى توصل إليها أفراد مختلفة بمثلثات مختلفة فاننا نستنتج القاعدة بأن مجموع زوايا المثلث ١٨٠° .

وفى الرياضيات (ليس بالضرورى العلوم الأخرى) لابد أن تحقق القاعدة التى توصلنا إليها بالتفكير الاستقرائى عن طريق البرهنة بالاستنتاج الرياضى أو البراهين الأخرى . و يستخدم تلاميذ المرحلة الأولى (والاعدادية) التفكير

الاستقرائى فى الوصول إلى النتائج العامة مثل القاعدة السابقة أو نظرية فيثاغورث وغيرها . ولما كان التلميذ فى هذه المراحل غير مستعد للبرهان المنطقى فيجب على المدرس أن يحرص ألا يقع التلاميذ فى الوصول إلى تعميمات خاطئة ناتجة من الحالات الخاصة غير الكافية .ولذا يجب أن يوضح للتلميذ عند استنتاجه قاعدة معينة مثل قاعدة مجموع زوايا المثلث بأنه إذا توصل الفصل ، وأيضا كل فصول المدرسة وكل الفصول فى المدارس المختلفة إلى هذه القاعدة فاننا نستخدم هذه القاعدة كقاعدة عامة لجميع المثلثات .

والتفكير الحدسى هو جزء من التفكير الخلاق وهو الخاص بالاكتشاف الرياضى . والاكتشاف الرياضى يمر بمراحل : مرحلة التحضير وهى المرحلة الخاصة بالملاحظة والتجريب ثم مرحلة المعالجة الرياضية mathematization والعمل الدائب المتواصل للوصول إلى الحل أو الكشف الجديد ثم مرحلة التحضين incubation يتم فى آخرها عن طريق التفكير الحدسى (وهو ببساطة التفكير التخمينى للحل دون أن يعرف سببه) الالهام بالحل أو الكشف الجديد ثم مرحلة تحقيق النتيجة التى توصل إليها عن طريق البرهان الرياضى والمنطق ثم مرحلة التطبيق .

ولايمكن فصل طرق التفكير بعضها عن بعض فكلها تتكامل وتستخدم فى الكشف الرياضى أو فى حل المشكلات سواء على المستوى العالى للرياضيين والإخصائيين أو على مستوى التلميذ فى الفصل .

وبالنسبة لحل المشكلات فنقصد بالمشكلات على مستوى التلميذ المسائل والتمارين اللفظية أو الرمزية . أما بالنسبة للمشكلات الرياضية العامة فاختراع أساليب لحلها أو خلق مشاكل أخرى يعد أساس تطور الرياضيات عبر تاريخها فى العصور المختلفة . وكما يقول هيلبرت : « أى فرع من العلوم يكون ملىء بالحياة طالما يقدم مشكلات بكثرة ، فقلة المشكلات أو إنعدامها هو علامة موته » . فمثلا توسعت الأعداد لتحل مشكلات مختلفة فقد اكتشفت الأعداد الصحيحة والقياسية والحقيقية والمركبة لتحل مشاكل مثل حل معادلات :

س + أ = ٠ ، أ س + ب = صفر ، س^{٢} ـ أ = صفر ، س^{٢} + أ = صفر على الترتيب (حيث أ عدد طبيعى) كما أن الأعداد التى اكتشفها هاملتون

كتعميم الأعداد المركبة وتسمى الأعداد الرباعية (وهى على صورة أ + ب ت + حـ هـ + د و حيث ت^{٢} = هـ^{٢} = و^{٢} = - ١ ، ت هـ = و ، هـ ت = - و ، هـ و = ت ، و هـ = - ت ، و ت = هـ ، ت و = - هـ ، ت هـ و = - ١) حلت مشكلات بعد ذلك فى النظرية النسبية والميكانيكا والكهرباء .. وأيضاً مشكلة إيجاد صورة بالجذور لحل معادلة الدرجة الخامسة أدت إلى اختراع المجموعات التى هى مفهوم أساسى فى الرياضيات الحديثة .

ولما كان حل المشكلات يعتبر ركنا أساسيا فى الرياضيات يمكن بواسطته ، استخدام طرق التفكير المختلفة فسنقدم باختصار فكرة عن دلالته فى تعلم الرياضيات وتدريسها .

(١) حل المشكلات هو عملية نتعلم عن طريقها مفاهيم جديدة وهذا ما تتبعه البرامج والكتب المدرسية الحديثة (فى الخارج) . إذ لا تقتصر المشكلات (التمارين والمسائل) على المحتوى الذى سبق شرحه ولكن فى تقديم واكتشاف المعلومات الجديدة ، وقد تتضمن مثل هذه المشكلات بعض الارشادات التى تساعد التلميذ فى الحل فمثلا إذا كان الدرس يتعلق بايجاد الاتحاد والتقاطع للفئات قد يشمل التمارين تمرين مثل : هل يتوزع الاتحاد على التقاطع أى .. هل أ ⊔ (ب ⊓ ج) = (أ ⊔ ب) ⊓ (أ ⊔ ج) .

(ارشاد : اختر ثلاث فئات أ ، ب ، ج لهم عناصر مشتركة (ثم غير مشتركة ثم قارن النتائج بالفئات المأخوذة)

(٢) حل المشكلات يمكن أن يكون طريقة للتدريس فحديثا لم يعد الاهتمام هو التدريس لكى نساعد التلميذ على حل (المشكلات) التى لا تخرج عن بعض أنماط مألوفة ، ولكن التدريس من خلال المشكلات وحلها فمثلا يمكن تقديم الأعداد المركبة عن طريق محاولة حل مشكلة ايجاد جذور المعادلة س^{٢} + أ = صفر حيث أ عدد طبيعى .

(٣) حل المشكلات يساعد على تكامل استخدام المعلومات وطرق التفكير ونقل التعلم إلى أحوال أخرى و يثير حب الاستطلاع العقلى نحو الاكتشاف .

ولذا فانه بدلا من إعطاء تمارين تقليدية كثيرة لها نمط أو أنماط معينة ، يستحسن أن يعطى التلميذ بعض المعلومات الرياضية ثم يطلب منه خلق تمارين جديدة مبنية على المعلومات المعطاه أو تشجيعه على تطبيق قانون عام فى أحوال مختلفة ، وفى توسيع تركيبات رياضية . وكذلك اعطاء تمرينات غير روتينية لا يطلب حلها فى وقت زمنى محدد .

(٤) من المهم للدارس والمدرس أن يعرف العوامل الداخلة فى عملية حل المشكلات مثل (أ) حل المشكلات عملية عقلية معقدة تتضمن التخيل واللعب والدافع وحب الاستطلاع والتحليل والتجريد وتداعى الأفكار ، (ب) حل المشكلات يتطلب استجابات جديدة وأصيلة وفريدة ، (جـ) حل المشكلات يتطلب خلفية من المعلومات ومهارة فى القراءة والحسابات وربط الأفكار و يتطلب أيضا تحليل وخطوات و برهنة .

(٥) و يستطيع المدرس أن ينمى قدرة التلميذ فى حل المشكلات عن طريق :

(أ) تحديد المشكلة ــ و بالأحرى السؤال المطلوب اجابته فى المشكلة .

(ب) إختيار المعلومات المناسبة والمحتاج إليها فى حل المشكلة واستعادة المعلومات الغير مؤدية للحل .

(جـ) ربط المشكلة بمشكلات أخرى مشابهة معروف حلها .

(د) استخدام خريطة سير (إنسياب) Flow chart للعلاقات والعمليات المتضمنة .

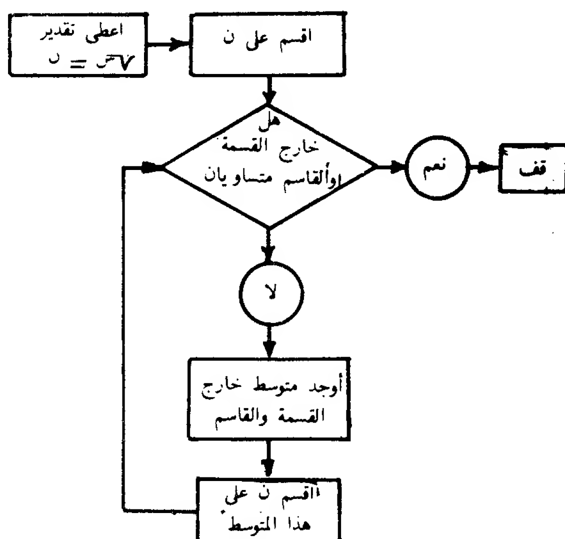
(هـ) الوصول إلى الاجابة المطلوبة وتحقيقها .

(و) تعميم النتيجة التى وصل إليها .

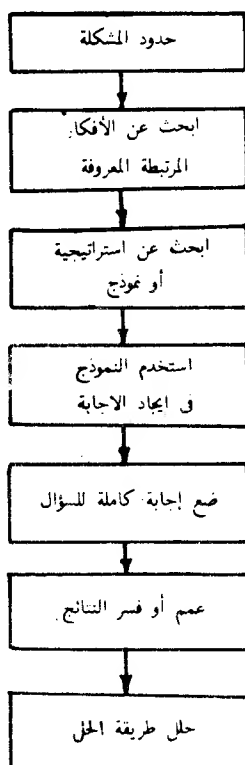
(ز) تطبيق المعلومات الرياضية فى مجالات أخرى وفى الحياة اليومية وتحديد دور الرياضيات فى التقارير والمعلومات الجديدة .

(ح) استخدام الرياضيات كوسيلة لحل المشكلات وتشجيع طرق التفكير المختلفة وطرق البرهنة المختلفة .

(ط) استخدام طرق مختلفة للحل وانتقاء الطرق الأصلية والجديدة .



(أ)



(ب)

شكل (٤)

و يبين شكل (٤ ــ أ) خريطة سير تعطى طريقة لايجاد √س أما شكل (٤ ــ ب) فيبين خريطة سير خطوات (أو عملية) حل المشكلات بصفة عامة .

هذا وستتضح بعض أهداف المجموعة (ب) وتحقيقها بصورة أوسع فى الباب الرابع عند تدريس الجبر والهندسة .

٣.١ ــ المجموعة (جـ) : أهداف تتعلق بتنمية المهارات :

تعلم الرياضيات واستخدامها يتطلب التمكن من بعض المهارات مثل الحسابات computation والتداول manipulation الجبرى . وهذه المهارات ليست فقط أساسية فى تعلم الحساب والجبر ولكنها تعد أساسية فى دراسة الرياضيات . فمعرفة أساسيات وقواعد أى موضوع فى الرياضيات يتطلب

مهارة فى استخدامها ومهارة فى حل مسائل عليها ، وهذه بالتالى تتطلب مهارة حسابات وتداول . ومهارات الحسابات لا تقف على مهارات إجراء العمليات الأربع الأساسية فى الحساب ولكنها تمتد إلى مهارات الحسابات فى ايجاد مشتقة وتكامل الدوال ومسائلها وفى حل المعادلات ، وفى مسائل القياس المباشرة وغير المباشرة فى الهندسة وحساب المثلثات ، ...

ومسألة تكوين أو تحسين المهارة يستلزم نوعاً من التدريب ، ولكن مثل هذا التدريب لا يجب أن يكون قائما فقط على الاستظهار والتمرين الطويل الممل ، لأن ذلك يؤدى إلى تكوين اتجاهات غير محببة نحو الرياضيات ، فحتى الرياضيون يكرهون الحسابات بالاستظهار . ومن ثم فإن الاتجاه الجديد ينادى بأن يكون تعلم المهارات قائما على معرفة المعنى وعلى الفهم . فبمجرد الوصول إلى معنى يمكن للتدريب أن يبنى المهارات ، المهارات التى تجرى كما يقول هوايتهد « بدون تفكير» و بذلك يتحرر العقل ليستقبل الأفكار الجديدة .

وفى الواقع تحبذ البرامج الجديدة مستوى عالى من الكفاءة الحسابية ، وتركز على أسلوب جديد فى تعلم المهارة . فهى تعتقد أن التدريب المناسب الكافى يمكن أن يلتحم مع تحصيل المفاهيم الجديدة ، وأن التدريب المناسب الكافى ليس فقط الذى يمكن أن يعطى مع رياضيات أكثر ولكنه هو الطريقة السليمة الفعالة لاعطاء المهارات التكنية techical skills . فصفحات من التدريب وعديد من المسائل المعادة المصطنعة ليست ذات نفع فقط ولكنها تعوق عملية التعلم . وهذه البرامج تقترح أن تستبدل التدريبات غير الدافعة unmotivaled التقليدية بمسائل (مشكلات) توضح المفاهيم الجديدة . وأن يكون التركيز المستمر فى برنامج ما مستندا على نمو القدرة على فهم واستخدام الأفكار والعمليات والمبادىء فى حل المشكلات المجسدة concrete ، أكثر من التوصل إلى مجرد سهولة ومهارة فى التداول . والتركيز الحالى فى التعلم يقترح أسلوبا جديدا لتعلم المهارات (الحسابية مثلا) . هذا التركيز يكون على التركيب structure ، وعلى الاكتشاف ، وعلى الممارسة ، وعلى المعنى ، وعلى التغذية reinforcement . ويمكن استخدام مواد جديدة مثل : الكتب المبرمجة ــ ميكنة التدريس ــ المكنات الحاسبة ــ الوسائل السمعية والبصرية فى تعلم المهارات .

ومن جهة أخرى يمكن اعتبار الرياضيات شيء مثلا مباراة game لها قواعد وأهداف ولاعبين وتتطلب مهارات معينة . ومباريات الرياضيات يمكن أن تُلعب لغرض الرضاء العقلي أو إكتساب بعض المهارات . ولكي تكون المباراة ممتعة يجب أن يكون اللاعبين مهرة . وعلى هذا الأساس يمكن تعلم المهارة الحسابية مثلا عن طريق المباريات .

وبالرغم من أن التدريب ليس وحده الذى يحسن أو يبنى المهارة ، إلا أنه يعتبر جزءاً مكاملا integral part فى تدريس الرياضيات . فهو يعد أساسيا للتذكر و بناء (أو التعود على) الدقة والثقة وتحسين الكفاءة . ولكى يحقق التدريب هدفه يجب أن يسبقه تدريس معنى وفهم المفاهيم والأفكار والمبادىء والتركيب الرياضى ، وأن يعطى فى الوقت المناسب و بالكمية المناسبة . ولكى يكون التدريب ذا فاعلية فى تحسين أو تنمية المهارة نقدم ما يلى :

١.٣.١ ــ مبادىء أساسية فى التدريب :

الاقتراحات التالية تعطى معنى وتشويق interest لأنشطة التدريب .

١ ــ أن يتضح للتلميذ من خلال التدريب أنه سوف يتقدم عن طريقه ، وأن يساعده التدريب على فهم الحاجة إلى الاعادة ، وأن يكون واعيا بمميزات أن يكون ماهراً (فى الحسابات مثلا) ومساوىء أن يكون فاشلا فى اكتساب المهارة .

٢ ــ يجب أن يجرى التدريب بتفكير و بصيرة ، حتى لا يصبح مجرد إعادة ميكانيكية .

٣ ــ يجب أن يتبع التدريب الاكتشاف والفهم لمبادىء ومفاهيم سابقة ، أو يستخدم كوسيلة للاكتشاف والفهم لمواد مستقبلة .

٤ ــ يجب أن يتضمن التدريب اجابات صحيحة أكثر من اجابات خاطئة ، فيزود المدرس بعض التمارين باجابات ليستخدمها التلميذ فى مراجعة وضبط وتصحيح مسار عمله .

٥ ــ يجب أن يكون التدريب مختصراً و يقدم على فترات .

٦ ـ يجب أن يعطى التدريب فى تمارين ذات معنى ليسهل نقل أثر التعلم ، وتعلم التطبيقات .

٧ ـ يجب أن يتعلم التلميذ كيف يتدرب بنفسه ، وكيف يستخدم الاجابة فى التعلم المستقل .

٨ ـ يجب أن يعطى التدريب بأنشطة مختلفة متعددة مثل المباريات ، والمسابقات ، والفوازير ، والتمارين محدودة الوقت ، والحسابات العقلية ، والأنشطة الجماعية ، والتمارين الشفوية أو التحريرية .

٩ ـ يجب أن يركز التدريب على المبادىء (والخواص) العامة أكثر من الطرق القصيرة أو الخدع tricks . فمثلا خواص التوزيع والدمج تمدنا باجراءات لمواقف عديدة مثل جمع كثيرات الحدود وتحليل كثيرات الحدود وايجاد المعادلات المتكافئة ... فهذه المبادىء العامة تقلل الحاجة لتذكر عمليات ميكانيكية .

١٠ ـ يكون التدريب أكثر فاعلية إذا أخبر المتعلم بتقدمه عن طريق المقارنات بأعماله السابقة ، أو بأعمال زملائه فى الفصل أو فى فصول أخرى بمدرسته أو بمدارس أخرى فى بلده أو خارجها .

١١ ـ يجب ألا يكون التدريب للعقاب حتى لا يكون تعليم الرياضيات خبرة غير محببة .

١٢ ـ يستحسن ألا تعطى التدريبات بطريقة اعتباطية محضة . فمثلا لا يفضل اختيار النمر الزوجية أو الفردية (عشوائيا) لعملها كتدريب . ولكن يفضل أن يساعد المدرس من خلال عمل بعض التمارين أن يصل التلميذ إلى نمط معين ... فمثلا بدلا من طلب المدرس للتلاميذ عمل النمر الفردية فى تدريب ما ، أن يطلب منهم عمل النمر الفردية حتى يمكنهم التوصل إلى نمط متضمن فى الحل ثم بعد تسجيلهم للقاعدة التى يستخدموها فى الحل ، يعملوا التمرينات التى تخالف فى حلها القاعدة .

١٣ ـ يجب أن يكون التدريب تفريدى individual . فالتلميذ القوى لا يحتاج إلى نفس عدد ونوعية التمرينات فى التدريب . ويجب على المدرس

استخدام الاختبارات التشخيصية والملاحظات والمقابلات للتعرف على الحاجة للتدريس العلاجي وسبب الصعوبات . ويمكن للمدرس الاستعانة بأسئلة فى لقائه مع التلميذ الضعيف لمعرفة التشخيص ثم العلاج بالتدريب المناسب مثل : هل يمكنك ذكر الاجابة لى ؟ هل الاجابة صحيحة ولماذا ؟ كيف توصلت إلى الاجابة ؟ كيف فكرت فى البداية عندما ابتدأت فى حل المسألة ؟ ما الذى فكرت فيه قبل أن تقول الاجابة لى ؟ هل يعجبك هذا النوع من المسائل ؟ وما النوع الذى تفضله ؟ ...

وفيما يلى نقدم فكرة عن كيفية تعلم المهارات بالأساليب الحديثة :

٢.٣.١ ــ أساليب حديثة فى تعلم المهارات :

ذكرنا أن الاتجاه الحديث فى تعلم المهارات يركز على بعض اعتبارات أساسية منها : الاكتشاف ــ التركيب ــ الممارسة ــ استخدام تكنيات عديدة بأنشطة مختلفة ومنها المباريات . وهذا ما سوف نوضحه فيما يلى مع الاستعانة ببعض الأمثلة .

١ ــ تطويع التدريب الروتينى ليؤدى إلى اكتشاف خبرة ابتكارية ومعرفة جديدة . ونذكر فى هذا الصدد ما قدمه الرياضى الكبير جاوس ، عندما كان فى الثامنة من عمره ، حينما طلب منه المدرس ايجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ .. وقد توصل جاوس بسرعة إلى الاجابة ٥٠٥٠ دونا عن زملائه الذين كانوا يتعثرون فى جمع الأعداد المتعاقبة . فقد لاحظ جاوس أن :

حـ = ١ + ٢ + ٣ + ... + ٩٨ + ٩٩ + ١٠٠

حـ = ١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ + ٠ ... + ٣ + ٢ + ١

٢ حـ = ١٠١ + ١٠١ + ١٠١ + ... + ١٠١ + ١٠١ + ١٠١

٢ حـ = ١٠٠ × ١٠١ أى حـ = ٥٠٥٠

أى أنه توصل حدسياً إلى اكتشاف القانون حـ = ن/٢ [أ + ل] .

ومن ثم يمكن للمدرس أن يستغل التدريب الروتينى و يطوعه ليكتشف التلميذ أنماط معينة تؤدى إلى مفاهيم وقوانين جديدة مثل هذا القانون . فمثلا

عن طريق إعطاء المثال الموجود فى بند ١.١ بأعداد مختلفة يساعد المدرس التلميذ من خلال الأنماط أن يصل إلى القاعدة ــ س × ــ ص = + س ص كما وضحنا من قبل .

٢ ــ استغلال التدريب على مهارة ولتكن المهارة الحسابية مثلا فى اعطاء بصيرة بتركيب النظام العددى وفهم القيمة المكانية وخواص العملية المتضمنة فى الاجراء الرياضى .

فمثلا التدريب :

(أ) ٣٧١ + ٢٩٣٤ + ٧٠٦٦

(ب) ٨٩٩ + ٤٥٦ + ٥٤٤

(حـ) ٣ $\frac{١}{٧}$ + ٥ $\frac{٣}{٥}$ + ٢ $\frac{٢}{٥}$

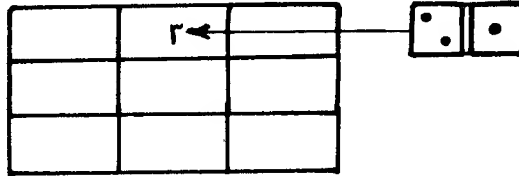
بدلا من إجرائها بالطريقة المعتادة التى يتبعها معظم التلاميذ ، يمكن حث التلاميذ على ايجاد الحل بطريق قصير، فيلاحظوا أنه يمكن حل هذه التمارين بسهولة باستخدام قانون الدمج وجمع الحدين الأخيرين فى البداية .

٣ ــ استخدام المباريات فى تعلم المهارات . فالمباريات تعتبر وسائل فعالة لعمل تدريب على المهارات بجانب أهميتها فى تحقيق أهداف أخرى . خاصة عندما تكون المباريات مختارة لتناسب حاجات التلاميذ ومخططة ومنظمة بعناية ، وأن تجرى فى الوقت المناسب ، وأن يتقبل المشتركون فى المباراة مسئولية تعلم شيء منها . والمباريات الممتعة تناسب التلاميذ الضعفاء والأقوياء والمبدعين الذين قد يبتدعوا بأنفسهم العاب.والمباريات تلعب فى جو رياضى مرح ممتع يعايش التلاميذ بعضهم البعض كفرق أو كأفراد متنافسين يريدون أن يقدموا أحسن ما فى عندهم . ويمكن للمدرس أو التلميذ إعداد المباريات سواء أكانت جديدة أو معدلة للألعاب والمباريات الجماعية المألوفة .

فمثلا يمكن تطويع لعبة « عروستى » لتكون مباراة للتعرف . فيختار المدرس أو التلميذ حد أو عدد أو قاعدة أو نظرية أو . . و يُطلب تخمينها والتعرف عليها بأقل من عشرين سؤال . أو تطويع لعبة البنك لاكتساب مهارة

العمليات الحسابية . ومن المباريات المحببة مباريات الكروت .. مثل المأخوذة عن لعبة البينجو (bingo) . وتتكون فيها كروت اللعب من مصفوفات من اعداد أو التعبيرات الجبرية أو الحدود أو الاشكال الهندسية ، معتمدة على البرنامج المتضمن .كروتة اللعب توزع على اللاعبين . أما كرتة النداء فتوزع على تلاميذ الفصل . التلميذ المنادى يختار كرت النداء call card عشوائيا . يحسب اللاعبين الاجابة و يغطوا المكان المناسب فى كروت اللعب لديهم . التلميذ الذى يغطى أماكن صف أو عمود أو قطر أسرع من الباقين يكون هو الفائز.

فمثلا يمكن عمل كرتة بينجو بثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة . ونكتب فى المربعات العدد الذى يصف عدد النقط للدمينو ــ كما فى شكل (٥) . و يبدأ اللعب غن طريق رمى قرش لمعرفة من يبدأ . اللاعب الأول يسحب دومينو من كومة (من دومينو مصغر) . إذا كان له مكان فى كرت البينجو يضعه وإذا لم



يكن يعيده و يسحب الآخر ... اللاعب الفائز هو الذى يكون عنده ثلاثة من الدومينو فى خط . وهذه المباراة تساعد التلميذه فى المرحلة الأولى على معرفة معنى الجمع فى بداية تعامله مع الجمع .

ومن الوسائل التى تستخدم فى المباريات : الكروت المطبوعة ــ الكروت المضيئة ــ زهر طاولة ــ عدادات ــ أقراص تدور حول مركز ــ تكتب عليها تعبيرات جبرية أو مسائل حسب المباراة المتضمنة .

٤ ــ اشتراك التلاميذ والمدرس فى عمل جماعى واقعى مثل دهان فصل وتقسيم العمل فيما بينهم والتعلم من خلاله حساب الشراء ــ النسبة فى خلط الدهان ــ ايجاد المساحات لاشكال منظمة وغير منظمة ...

٤.١ ــ المجموعة (د): أهداف تتعلق بتذوق الجمال الرياضى وتقدير وحب الرياضيات :

العالم الذى نعيش فيه عالم متطور و يتطور بسرعة كبيرة جداً وللرياضيات دور كبير فى هذا التطور والسبق العلمى والتكنولوجى والاجتماعى . فحياتنا اليوم مبنية على الرياضيات وستكون مبنية أكثر فى الغد عليها . وتمثل لغة الرياضيات فيها مكانة كبيرة حتى ليقال أنها أصبحت اللغة الثانية بعد اللغة القومية .

وتقدير الرياضيات وتذوق جمالها يمكن تنميته عن طريق تعرف التلميذ على الرياضيات على أنها وسيلة لوصف الحياة من حوله ومعرفته للنماذج الرياضية واستخدامها ، مثل التنبؤ بالأحداث التى يمكن أن تقع تحت ظروف معينة أو فى معرفة مكان هبوط صاروخ عائد من القمر أو فى التخطيط لبناء طيارة ضخمة . هذا بجانب معرفة التلميذ على قدر مستواه بالدور الذى تلعبه الرياضيات فى النمو الحضارى خاصة فى عصرنا أو فى التاريخ بصفة عامة .

وحب التلميذ للرياضيات وتذوق جمالها لا يأتى فقط عن طريق معرفة دلالتها وتطبيقاتها فى الحياة والعلوم الأخرى ولكن أيضا عن طريق اكتشاف جمالها الذاتى وقوتها المتمثلة فى أنماطها وتركيباتها وتعميماتها وتوحيدها لأفرع مختلفة ، وهذا يأتى عن طريق جعل طرق التدريس مرنة تتيح للتلميذ اكتشاف أنماط الرياضيات وتركيباتها . وتجعله ينجح فى حل مشاكلها (وفوازيرها) وأن يناقش بحرية و بسهولة ما يلاحظه فى المواقف الرياضية ، وتتاح له فرصة تبادل الأفكار الرياضية وتطبيقاتها ، وأن يناقش الجديد والقديم فيها سواء فى الفصل أو خارجه كما تتيح له أن يسعد بتعلم الرياضيات .

وفى الباب الثانى والرابع والخامس ما يحقق بعضا من أهداف المجموعة (د) .

٥.١ ــ المجموعة (هـ):أهداف تتعلق بتكوين العادات والاتجاهات :

تحقيق أهداف المجموعة (هـ) (مثله مثل المجموعة د) يتطلب وقتا ليس بالقصير فتكوين الاتجاهات والعادات والميول أو إصلاحها لا يأتى عن طريق

درس واحد أو مجموعة قليلة من الدروس ، ولكن على المدى الطويل بحيث يحرص المدرس على تقدم التلاميذ نحو تحقيقها فى الفصل وخارجه . وهذا لا يأتى بالطبع إلا إذا كان للمدرس اتجاهات ايجابية نحو الرياضيات وله المقدرة على تفهم التلاميذ واتجاهاتهم . فاكتساب أو تكوين عادة الدقة فى التعبير يتطلب من المدرس أن يلاحظ التلميذ و يوجهه فى كتاباته (فى كتابة التعريفات أو منطوق النظريات أو خطوات الحل) وفى اسئلته أو الرد على الأسئلة فى الرياضيات أو خارجها . كذلك بالنسبة لحل المشكلات ، فتكوين الاتجاه الذهنى لعادة حل المشكلات تختلف عن مساعدة التلميذ فى معرفة حل مسألة معينة أو حل مسائل فى الرياضيات مختلفة بعضها عن البعض . وهذا يتطلب وقتا وجهدا فى خلق الدوافع واستمرار مساعدة المدرس للتلميذ فى حل المشكلات الرياضية وغير الرياضية بثقة مهما صغرت أو كبرت عن طريق تنمية قدراته فى حل المشكلات كما ذكرنا سابقا . وعن طريق تعويده على حل المشكلات التى تقابله سواء فى الدراسة أو الحياة اليومية ، وعلى مناقشة مشكلات الآخرين (والطرق المختلفة لحلها) . وأيضا بالنسبة إلى تكوين الاتجاهات السليمة (الايجابية) فهى تتطلب وقتا على تكوينها. ومن الاتجاهات التى يحرص المدرس على تكوينها خلال تدريسه للرياضيات والاتجاهات الخاصة مثل :

- الثقة فى الرياضيات ــ الولاء للرياضيات والرياضيين ولمدرسى الرياضيات ولزملائه دارسى الرياضيات ــ احترام الفرد لتحصيله فى الرياضيات بنفسه أو عن طريق غيره ــ التفاؤل والانشراح بتقدم الفرد فى الرياضيات .

- حب الاستطلاع للأفكار الرياضية والسعادة والرضا فى دراسته للرياضيات ــ تقدير قوة الرياضيات (وقد ذكرناها فى النقط السابقة) .

هذا بجانب الاتجاهات والقيم العامة مثل الأمانة ــ الشفقة ــ الاحترام ــ الاعتماد على النفس . ويمكن للمدرس تكوين الاتجاهات السليمة المختلفة السليمة المختلفة ولنأخذ بعض أمثلة فيما يأتى :

١ ــ يمكن تكوين الثقة والولاء للرياضيات عن طريق :

ــ أن يكون المدرس الشخص الذى يقبله التلاميذ ومستعدين لتقليده .

ــ أن يعمل المدرس مع تلاميذه بالصبر والرفق بحيث أن كل يوم وكل تلميذ يلاقى نجاحا ما .

ــ أن يجعل المدرس العملية التعليمية ثوابا أكثر منها عقابا .

ــ أن يكون المدرس عادلا فى تقييمه وفى حفظ النظام .

٢ ــ يمكن بناء اتجاه التفاؤل عن طريق :

ــ أن يكون المدرس شخصا متفائلا ومتحمسا ومخلصا .

ــ أن تقدم المسائل بطريقة لا تفزع التلميذ وعقليته .

ــ اعطاء واجبات وتحديات فى مستوى قدرات التلميذ .

ــ تقديم الوسائل والتوضيحات ، المسائل ، والتطبيقات التى تعطى تغيير فى الدروس اليومية .

٣ ــ يمكن تكوين السعادة والرضا فى دراسة الرياضيات عن طريق :

ــ تقديم المادة بطريقة تفهم . والتأكد من أن التلاميذ مستعدون ولديهم حب الاستطلاع ، و يتبارون فى معرفة الموضوعات .

ــ استخدام وسائل ومواد وطرق مختلفة التى تتيح للتلميذ أن يكتشف ، يناقش ، يقوم بالتجريب والقياس .

ــ أن يشترك التلميذ فى عمل الوسائل ، كتابة وقراءة المقالات ، الدراسة الذاتية ، المسابقات ، كل حسب ميوله ومستواه .

وعامة لتحقيق الأهداف المختلفة يلزم إجراء تعديل فى طرق التدريس والمناهج الموجودة حاليا بحيث تتسم بالمرونة و باتاحة الفرص للتلميذ لكى يعرف كيف يتعلم الرياضيات ويحبها و ينمى لديه الدوافع ليستمر فى تعلم الرياضيات بنفسه .

الباب الثانى

٢ ـ نبذة عن تاريخ الرياضيات بما فى ذلك رياضيات القرن العشرين

١.٢ الاستفادة من تاريخ المادة فى التدريس :

من المهم أن يأخذ المدرس فكرة عن تاريخ الرياضيات بالقدر الذى يسمح بفهم أساسيات المادة وأثراء ثقافته العامة عن الرياضيات ودورها فى الحياة ، وتأثرها وتأثيرها فى التقدم الحضارى ، وتنمية تقديره للمادة والذين ساهموا فى بنائها ولطرق التفكير الخلافة فى اكتشاف وخلق الرياضيات . وفهم الرياضيات على انها من صنع الانسان يساعد المدرس على تزو يد التلميذ بالطرق التى تجعله يكتشف (أو يعيد الاكتشاف بنفسه) القوانين والمفاهيم الرياضية ، وعلى أن يولد فيه حب المغامرة وحب الاستطلاع لمعرفة اسرار المادة وتركيبها وابداعيتها وروائعها ، وقوتها.ومن جهة أخرى الصعوبات التى تقابل الرياضيون فى نمو المادة هى التى يقابلها التلميذ أثناء تعلمه . ومن ثم يمكن تنظيم المادة تاريخيا بحيث تكون فى ترتيب مماثل لترتيب اختراعها .

وقد يكون فى معرفة رياضيات قدماء المصريين والعرب ما يعيد الثقة للتلميذ العربى فى حضارة أجداده التى كانت أساساً لحضارة الغرب وأيضا ما يدفعه الى خلق روح التحدى لاعادة مجد أجداده .

و يستحسن أن تكون الموضوعات التاريخية المتضمنة فى التدريس مرتبطة بخبرة التليمذ وغير منفصلة عن الموضوع الأصلى للدرس حتى لايشعر التليمذ بالملل ويمكن للمدرس خارج الفصل أن يوجه التلميذ فى قراءته الحرة عن تاريخ الرياضيات إلى المراجع الممكن الحصول عليها والمناسبة له .

ومن أمثلة هذه المراجع باللغة العربية :

١ ـ حضارة مصر والشرق القديم ـ للدكتور إبراهيم أحمد رزقانه وآخرين ـ القاهرة .

٢ ــ العلم والحضارة ــ للدكتور عبد العظيم أنيس .
٣ ــ أهرام مصر ــ مترجم ــ الألف كتاب ــ القاهرة ١٩٥٦ .
٤ ــ الرياضيات فى مصر القديمة ــ للدكتور مختار رسمى ناشد ــ رسالة العلم مجلد ٣٩ العدد ٣ سبتمبر ١٩٧٣ .
٥ ــ فضل الحضارة المصرية على العلوم ــ للدكتور مختار رسمى ناشد الهيئة المصرية العامة للكتاب سنة ١٩٧٣ .
٦ ــ الرياضة للمليون ــ مترجم ــ الألف كتاب ــ القاهرة ١٩٥٦ .
٧ ــ رواد الرياضة ــ مترجم ــ دار الهلال .
٨ ــ تراث العرب العلمى فى الرياضيات والفلك ــ قدرى طرقان ــ دار القلم ١٩٦٣ .
٩ ــ موجز فى تاريخ الرياضيات الابتدائية ــ محمد محمد السيد ــ مكتبة الشرق سنة ١٩٥٥ .

إلا أن المكتبة العربية تفتقر فى كتب عن تاريخ الرياضيات الحديثة ويمكن أن يجد المدرس جزءاً بسيطا عنها فى :

١ ــ أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة للدكتور شوق وآخرون ــ دار المعارف ١٩٧٠ .
٢ ــ المدخل فى الرياضيات الحديثة ــ للدكتور سوبر ــ ترجمة أديب ــ الهيئة المصرية العامة للكتاب سنة ١٩٧٠ .

أو يمكن للمدرس الاستعانة ببعض الكتب الاجنبية فى هذا الشأن . وقد ذكرنا بعضا منها فى المراجع بآخر الكتاب .

ومن أمثلة الموضوعات التى يمكن أن تخدم الهدف من تدريس تاريخ المادة أو تطعيم المادة بتاريخها :

١ ــ مراحل عامة لتاريخ الرياضيات عبر العصور .
٢ ــ تطور النظام العدى ورموز الأعداد عند المصريين القدماء ــ البابليين ــ العرب والهنود ــ الرومان ــ صعوبة الضرب فى النظام الرومانى .

٣ــ تطور الرموز الجبرية ــ تاريخ الصفر ــ استخدام كلمات لتدل على المتغير (مثل كومة فى مصر القديمة ، المال عند العرب) ثم استخدام اختصار الكلمات ــ استخدام الرموز ــ استخدام ديكارت رمز الأسس مثل س^{٣} بدلا من س . س . س .

٤ــ اللوغاريتمات وتطورها ونقل الاهتمام منها كأداة للحساب إلى الدوال اللوغاريتمية .

٥ــ مآخذ على هندسة اقليدس أى عيوب الهندسة الاقليدية .

٦ــ تاريخ حساب المثلثات ــ علاقته بالمراسم الدينية مثل اتجاه الكعبة .

٧ــ مفهوم الدالة ــ تطور مفهوم الدالة .

٨ــ تطور النظام للعددية .

٩ــ تاريخ نظرية فيثاغولاث .

١٠ــ الهندسة عند الأغريق .

١١ــ تاريخ التفاضل والتكامل والمشاحنات بين نيوتن وليبنز .

١٢ــ فضل البابليين والهنود على علم الحساب ــ فضل الأغريق على الهندسة فضل العرب على الجبر .

١٣ــ تطور الجبر ــ تطور الهندسة ــ تطور التفاضل والتكامل .

١٤ــ فكرة عن الرياضيين الذين يقابلهم التلميذ فى معرفته للرياضيات مثل : فيثاغورث ــ إقليدس ــ مينالوس ــ بطليموس ــ جاليليو ــ أرشميدس ــ الخوارزمى ــ نيوتن ــ ديكارت ــ نابير (واللوغاريتم النابييرى) ــ أو يلر ــ أرجند ــ جاوس ــ كوشى ــ كلين ــ ريمان ــ بولياى ــ لوبتشفسكى ــ هيلبرت .

١٥ــ فكرة عن بعض المشكلات الرياضية التى أدت إلى تطور الرياضيات عبر العصور . مثل محاولة حل المعادلة من الدرجة الخامسة ــ مشكلة تربيع الدائرة وتضعيف المعكب وتثليث الزاوية ــ المشكلات التى أثيرت وتمكن من حلها أو يلر ، المشكلات التى أثارها هيلبرت .

١٦ــ فكرة عن تطور الفكر والمنطق الرياضى ــ تطور فلسفة الرياضيات .

ويمكن للمدرس أن يقدم بعض الموضوعات الشيقة عن تاريخ الرياضيات والرياضيين الذين أسهموا فى بنائها أثناء معالجته لبعض الموضوعات داخل الفصل . فمثلا يمكنه أن يتكلم عن النظام الستينى البابلى للأعداد عند التعرض عن السبب فى تقسيم الزاوية إلى درجات ودقائق وثوانى . أو التعرض إلى مسألة أحمس عند الكلام على المعادلات من الدرجة الأولى ، التعرض إلى طريقة الخوارزمى عند حل المعادلات من الدرجة الثانية وطريقته فى إكمال المربع . وتدريس اللوغاريتمات يمهد لتقديم نابير و بريجز وتدريس الدالة يمهد لتقديم ليبنز التى أعطى لها هذا الاسم . ويمكن ربط الهندسة التحليلية بديكارت وفرما ، ويمكن إعطاء فكرة سريعة على تطور النظم العدية عند تدريس النظم العدية بأساس مختلف وهكذا . ويمكن التعرف على بعض أجزاء من تاريخ المادة عن طريق الأنشطة الحرة خارج الفصل كتكليف أحد التلاميذ (أو المدرس يعطى محاضرة) بكتابة ، أو إعطاء محاضرة عن قصة تطور العدد و يشمل ذلك طرق العد ، التعبير العشرى ، اليونانى والرومانى ، العربى الهندى ، اكتشاف العلامة العشرية .... النظم العدية بأساس مختلف عن عشرة أو إعطاء محاضرة عن التراث العربى فى الرياضيات والفلك .

وعلى العموم فواجب المدرس أن يزود مكتبة المدرسة بالكتب المناسبة فى تاريخ الرياضيات و يشجع التلميذ و يرشده فى كيفية استخدامها وقرائتها .

وفيما يلى سنلقى بعض الضوء على تاريخ الرياضيات فى العصور الآتية :

- الرياضيات فى العصور القديمة وتشمل الرياضيات عند قدماء المصريين ، وعند البابليين ، وعند الاغريق .
- الرياضيات عند العرب .
- الرياضيات عند الغرب حتى القرن الثامن عشر .
- الرياضيات الحديثة (رياضيات القرن التاسع عشر والقرن العشرين) .

٢.٢ ـ الرياضيات فى العصور القديمة :

١.٣.٢ ـ الرياضيات عند قدماء المصريين :

المصدر الأساسى لما نعرفه عن الرياضيات عند قدماء المصريين يتمثل فى ورقتين من أوراق البردى أحدهما تسمى بردى رايند أو أحمس Ahmes Papyrus—Rhind فى المتحف البريطانى مكتوبة حوالى سنة ١٩٥٠ قبل الميلاد ، والأخرى بردى موسكو Golensitev مكتوبة حوالى سنة ١٩٠٠ قبل الميلاد . أما بقية المكتوبات فتحتوى على أجزاء متفرقة انطباعاتها كلها موجودة فى ورقتى البردى الرئيسيتين . ومنها يتبين أن أول الاحصائيات الموجودة فى التاريخ كانت فى مصر القديمة . فمن أوائل الاحصائيات التى يذكرها التاريخ الاحصائية التى عملت فى مصر سنة ٣٠٥ ق . م لجمع المعلومات عن عدد السكان وثروة مصر لعمل الترتيبات الخاصة ببناء الهرم . وقد قام الملك رمسيس الثانى سنة ١٤٠٠ قبل الميلاد بعمل تعداد لأراضى مصر لتقسيمها على أتباعه .

وقد نشأت الهندسة فى مصر القديمة كوسيلة عملية لقياس الأطوال والزوايا والمساحات والحجوم وذلك لحاجتهم لعمل القياسات الخاصة بالفيضانات وايجاد مساحة الأراضى للاستفادة من مياه الفيضانات وتحديد الضرائب وايجاد أحجام الأشكال لحاجتهم إلى بناء المعابد والأهرامات . ولو أن المصريين القدماء اكتشفوا بعض العلاقات بين الأشكال الهندسية إلا أنهم لم يستطيعوا وضع تعميم لهذه العلاقات فمثلا استطاع المصريون اكتشاف العلاقة التى تربط أضلاع المثلث القائم أى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ يكون قائم الزواية إلا أنهم لم يستطيعوا تعميم ذلك إلى صيغة نظرية فيثاغورث .

أما بالنسبة للحساب فقد ابتدعوا النظام العشرى ولكن لم يصلوا إلى فكرة الخانة ، وكانت العمليات الحسابية قائمة على الأساس الجمعى ، كالتضعيف لعملية الضرب والقاعدة المناظرة للقسمة فمشتقة من تتابع التنصيف .

وقد استخدمت هذه العمليات المطولة فى حل مسائل أولية فى توزيع البيرة

والخبز . وبنفس الطرق العددية استطاعوا ايجاد المساحات مثل مساحة المثلث أو المضلع أو الدائرة حيث كانت توجد بتربيع (١ — $\frac{١}{٩}$) القطر ∴ أى ($\frac{٨}{٩}$ × ٢ نق)^{٢} وهى تعطى ٣,١٦ للنسبة التقريبية ط . كما استطاعوا ايجاد حجوم المجسمات خاصة الهرم (الناقص) .

وبالنسبة للجبر فلو أنهم لم يعرفوا الرموز الجبرية إلا أنهم استعملوا كلمة كومة لتدل على المتغير ويوجد مسائل جبرية تتناول حل المعادلات من الدرجة الأولى . أما بالنسبة للميكانيكا فلو أنه لا يوجد دليل كتابى على علمهم بالميكانيكا إلا أن بناء الهرم يوحى أنهم كانوا على علم بميكانيكا الروافع . وفيما يلى نعرض فكرة عن الرموز المستخدمة فى النظام العددى وكيفية إجراء عمليتى الضرب والقسمة وبعض المسائل الهندسية والجبرية عند قدماء المصريين .

١ — النظام العددى :

استخدم المصريون النظام العشرى ولكنهم لم يصلوا إلى استخدام الخانة . وقد عبروا عن الأعداد ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠٠٠ بالرموز الآتية على الترتيب .

𓏺 ، 𓎆 ، 𓍢 ، 𓆼 ، 𓂭 ، 𓆐 ، 𓁨

ولكنهم لم يبتكروا رمزا للصفر (وقد ابتكر الهنود رمز الصفر حوالى ١٠٠ ق . م) ولأنهم لم يكن فى نظامهم فكرة الخانة فكانوا يستخدمون التكرار فمثلا لكتابة العدد ٩٦٨ كان المصريون يكررون الرقم ١ ثمانى مرات والرقم ١٠ ستة مرات والرقم ١٠٠ تسع مرات أى أن كتابة العدد يحتاج إلى ثلاثة وعشرين علامة متجاورة وهذا يصور لنا مدى صعوبة المسائل والعمليات الحسابية بالنسبة للأعداد الكبيرة فى تلك الأوقات .

فمثلا ٣٤٨ تكتب : 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

(ويلاحظ أن هذا هو الحال فى النظام العدى الرومانى الذى لا يعتمد على الخانة فمثلا ١٣ تكتب XIII ، ١٧ تكتب XVII) .

٢ ــ الطريقة فى الضرب عند قدماء المصريين :

الطريقة فى الضرب نوضحها كما تأتى :

ضرب ٣٩ × ٢١

٣٩	١ مرة
٧٨	٢ مرة
١٥٦	٤ مرة
٣١٢	٨ مرة
٦٢٤	١٦ مرة

٦٢٤	١٦ مرة	تجمع
١٥٦	٤ مرة	
٣٩	١ مرة	
٨١٩	٢١ مرة	

وذلك لأن ٢١ = ١٦ + ٤ + ١

وعلى ذلك فان ٣٩ × ٢١ = ٨١٩

أما إذا أردنا ضرب ٣٩ × ٣ مثلا فاننا نجمع العددين فى الصف الأول والثانى للعمود الأول .

أى ٢٩ + ٧٨ = ١١٧ هى ٣٩ × ٣ (لأن ٣ = ٢ + ١) .

ويمكننا أن نقارن بين هذه الطريقة والطريقة الروسية (التى يمكن أن نكتشف منها فكرة الكسور الثنائية أى الكسور باستخدام النظام العدى بأساس ٢) الآتية :

ضرب ٩٣ × ٢٧ ونحصل عليها كما يأتى :

٩٣	٢٧
١٨٦	١٣
٣٧٢	٦
٧٤٤	٣
١٤٨٨	١
٢٥١١	

وتتلخص الطريقة فى ضرب العدد فى العمود الأول فى ٢ وقسمة العدد فى العمود الثانى المناظر على ٢ .. وأى باقى إذا وجد يهمل . عندما تنتهى القسمة نشطب فى عمود المضاعفات الأعداد التى تقابلها أعدادا زوجية فى عمود القسمة ومجموع الأعداد الباقية فى عمود المضاعفات يكون هو الاجابة ويمكن أن نفسر الطريقة كما يأتى :

$$٩٣ \times ٢٧ = ١٨٦ \left(١٣ + \frac{١}{٢}\right)$$
$$= ٣٧٢ \left(٦ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}\right)$$
$$= ٧٤٤ \left(٣ + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨}\right)$$
$$= ١٤٤٨ \left(١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦}\right)$$
$$= ١٤٤٨ + ٧٤٤ + ١٨٦ + ٩٣$$

٣ ــ الطريقة فى القسمة عند قدماء المصريين :

الطريقة فى القسمة تعتمد على نفس طريقة الضرب ولكن فى اتجاه معكوس .

فمثلا لقسمة ٨١٩ ÷ ٣٩ نبينها كما يأتى :

٣٩	١ مرة
٧٨	٢ مرة
١٥٦	٤ مرة
٣١٢	٨ مرة
٦٢٤	١٦ مرة

حيث نبحث فى العمود الأول عن الأعداد التى مجموعها يساوى المقسوم عليه ثم نجمع الأعداد المناظرة فى العمود الثانى (تضعيف الواحد) فيكون هو خارج القسمة وهو هنا ١ + ٤ + ١٦ = ٢١ .

ويمكن أن نشتق من هذه الطريقة الفكرة الأولية للقسمة كطرح متكرر ، والتى تستخدم كأحد مراحل تعلم اجراءات القسمة فى بعض البرامج الحديثة . فمثلا : ٢٤ ÷ ٤ = ؟ نستخدم عملية الطرح المتكرر

٢٤	
٤ —	١
٢٠	
٤ —	١
١٦	
٤ —	١
١٢	
٤ —	١
٨	
٤ —	١
٤	
٤ —	١
٠	٦

وعلى ذلك ٢٤ ÷ ٤ = ٦

ومن جهة أخرى فقد استخدم أحد الرياضيين التربويين (د . لبيب جورجى سعد) بأمريكا طريقة لتعليم مبادىء الحساب فى المراحل الأولى دون الاشارة إلى نظام الخانة أو القيمة المكانية — أى لا يعتمد على فكرة الخانة فى النظام العدى كما كان يفعل قدماء المصريين . فيبدأ تعليم الطفل الأعداد من واحد إلى عشرة مع العمليات الأربع عليها (+ − × ÷) ، ثم ينتقل إلى العشرات : عشرة ، عشرين ، ... مع العمليات الأربع عليها ثم ينتقل إلى المئات وإلى الآلاف و ... ثم الملايين مع العمليات الأربع على كل منها .

وفيما بعد يعطى نظام الخانة ورموزها (كتابة الأعداد بها) وحسابها .

٤ — مسائل جبرية وحلولها :

من المسائل الجبرية الموجودة فى بردى أحمس « عدد إذا أضيف إليه ربعه كان الناتج ١٥ فما هو هذا العدد » . وقد حلت المسألة بافتراض أن العدد ٤ فيكون مجموع العدد وربعه ٥ . وبقسمة الناتج فى المسألة على الناتج فى الفرض أى $\frac{١٥}{٥}$ يكون العدد المطلوب ثلاثة أمثال العدد المفروض أى ٤ × ٣ = ١٢ .

ويوجد مسائل أخرى متدرجة فى الصعوبة مثل عدد (أو كومة heap) إذا

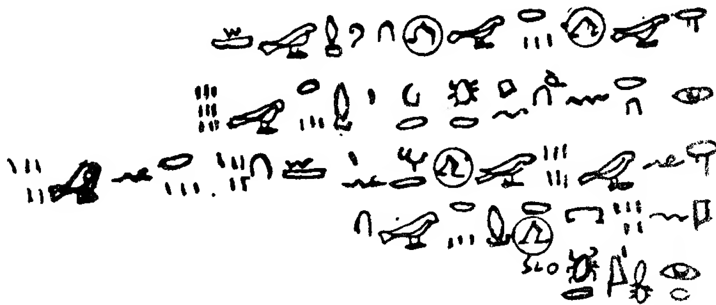
أضيف إلى سبعة كان الناتج ١٩ » والاجابة المتوصل إليها تكون فى صورة ٦ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$

مثال آخر : عدد إذا أضيف إليه ثلثاه ثم أخذ ثلث الناتج يتبقى عشرة فما هو العدد [أى س + $\frac{2}{3}$ س — $\frac{1}{3}$ (س + $\frac{2}{3}$ س) = ١٠]

وطريقتهم فى الحل هى بأخذ $\frac{6}{10}$ العشرة يتبقى ٩ ، ثلثا ٩ هى ٦ بجمعه عليها يكون ١٥ وثلثه ٥ وهى التى أخذت (فى الشكل ١ نبين الكتابة المصرية القديمة لهذه المسألة) .

وتتدرج التمرينات إلى مسائل أشد صعوبة مثل « المطلوب تقسيم المقدار ١٠٠ إلى عددين بشرط أن يكون جذر العدد الأول ثلاثة أرباع جذر العدد الثانى فما هما العددان » وفى هذه المسألة افترض أن العددين هما مربع $\frac{3}{4}$ ، ١ و بهذا الفرض استطاعوا الوصول إلى الحل .

وقد تناولت المسائل أيضا أمثلة من الحياة العملية مثل توزيع مقادير من الغلال أو الأرغفة على عدد من العمال حتى يحصل كل عامل على نصيب من الخبز يختلف عن نصيب زميله (فقد كان نصيب كل عامل يعتمد على قدرته الانتاجية) .



شكل (١)

٥ ــ الهندسة العمليــة :

أما فى الهندسة فقد برع قدماء المصريين فى قياس الزوايا والأطوال وحساب

المساحات والحجوم والمكاييل . ومثال على ذلك الدقة الموجودة فى بناء الهرم فزوايا قاعدة الهرم (بين ٥٦َ ٨٩ْ، ٣٠َ ٩٠) أى أن نسبة الخطأ لا تتعدى ±٠٫٠٧٪ بينما طول ضلع القاعدة يبلغ حوالى ٢٢٧ مترا والفرق بين أطول أضلاع القاعدة وأقصرها لا يتعدى ٠٫٢٠ مترا أى نسبة الخطأ لا تزيد عن ±٠٫٠٤٤، واتجاه كل جانب من جوانب الهرم يكاد يكون متوازيا تماما للجهات الأصلية الأربع وهى الشمال والجنوب والشرق والغرب كما لوحظ أن نسبة طول جانب الهرم إلى ارتفاعه تساوى ط .

ومن المسائل البسيطة الهندسية مسألة ايجاد بعدى مستطيل بمعرفة مساحته والنسبة بين بعديه مثل أرض مساحتها ١٢٠٠ ذراع وعرضها ثلاثة أرباع طولها وهنا افترض الحل أن العرض ٣ والطول ٤ فتكون المساحة المفروضة ١٢ ثم أوجد العلاقة بين المساحة الحقيقية والمفترض أى $\frac{١٢٠٠}{١٢}$ = ١٠٠ جذرها ١٠ وبذلك يكون الطول والعرض الحقيقيين عشرة أمثال الطول والعرض المفترضين .

٢.٢.٢ ـ الرياضيات عند البابليين :

بدأت حضارة البابليين ٢٠٠٠ ق . م أى بعد بدء الحضارة المصرية القديمة . و يتميز تفوق رياضيات البابليين باستعمالهم الخانة فى نظامهم العدى لأى عدد مهما كان كبيرا أو كان كسريا . وقد اشتق نظامهم العدى من نظام عملاتهم التى كانت من واحد إلى ستين وتوسع حتى أصبح النظام الستينى exagesimal ذو الخانة فمثلا ٢$\frac{١}{٢}$ = ٢$\frac{٣٠}{٦٠}$ ، ١٥٠ = ٣٠ + ٢ × ٦٠ . واستخدام فكرة الخانة سهل كثيرا من العمليات الحسابية التى أجروها مثل الجمع ، الطرح ، التربيع ، التكعيب ، ايجاد الجذر التربيعى أو التكعيبى ـ خاصة فى الفترة ما قبل القرن الخامس قبل الميلاد .

وقد بحث البابليون فى الأعداد التى تحقق $أ^٢ + ب^٢ = حـ^٢$. وكانت المشكلات (المسائل) التى عالجوها من النوع « ايجاد عددين إذا عرف مجموعهما أو باقى طرحهما أو حاصل ضربهما أو قسمتها » وكان يلجأ فى حل المشكلة الأولى والثالثة من هذا النوع إلى الصورة الخطية ، أما الثانية والرابعة

فكانت تبسط إلى الأولى عن طريق تربيع المجموع وطرح أربع مرات لحاصل الضرب . وهى الصورة التى يحل بها البابليون المعادلة من الدرجة الثانية .

وقد استطاعوا حل معادلات خطية ومعادلات من الدرجة الثانية والرابعة (تنتج من تربيع معادلة من الدرجة الثانية) .

وفى الهندسة توصل البابليون إلى مفهوم التشابه وإيجاد علاقات (قوانين) المساحة ، والحجوم . كما درسوا بعض العلاقات الهندسية مثل « المثلث المرسوم فى نصف دائرة يكون قائما » ، والعلاقات بين المضلعات المنتظمة . والتى أدت إلى ايجاد قيم تقريبية للأعداد $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، للنسبة التقريبية ط استخدموا ٣ أو $٣\frac{١}{٨}$.

وقاموا بعمل جداول لقوى بعض الأعداد الصحيحة ومعكوسها (أى ما يناظر اللوغريتمات) كما اشتغلوا بمسائل الربح المركب .

٣.٢.٢ ــ الرياضيات عند الاغريق :

ابتدأت الرياضيات النظرية عند الاغريق فى القرن الخامس والرابع قبل الميلاد . و يرجع إلى الاغريق خلق النظام البديهى المنطقى للهندسة . ومن عملهم فى نظرية الأعداد والقطوع المخروطية واللانهاية والميكانيكا ما مهد الطرق بعد ذلك فى تطور الرياضيات إلى ما هى عليه الآن .

فيعتبر الأغريق (اليونانيون القدماء) أول من قدم فكرة البرهان (البرهان المباشر والبرهان بالتناقض أو الحذف) ووضع الهندسة فى القالب المنطقى الذى نألفه اليوم وقد أسهم كثيرمن الرياضيين فى تطور الهندسة فى ذلك العهد ومنهم فيثاغورث (٥٠٠ ق . م) . إلا أن الهندسة حتى هذا الوقت كانت محتاجة إلى نوع من الربط والتنسيق ، و يعزى إلى إقليدس (٣٠٠ ق . م) عمل هذا الربط وخلق نظام البديهات . وكتب إقليدس عمله فى الهندسة الذى أسماه الأصول Elements . فمن بضع صيغ بعضها تعاريف و بعضها بديهيات أثبت حوالى ٤٠٠ نظرية جزأهم فى ١٣ كتاب ليست جميعها تخص الهندسة (منها استخدام الهندسة فى حل مسائل تعتبر جبرية ، معالجة مفهوم زينو

للانهاية وطريقته فى جمع المساحات تحت المنحنيات الدائرية وهى ما تستعمل فى التكامل ، ومناقشة الأعداد الأولية) .

وقد أعتبرت أصول إقليدس منذ ذلك العهد وعلى فترة ٢٢٠٠ سنة نموذجا للبرهان المنطقى .

ومن التعاريف التى وضعها إقليدس : « النقطة هى ما لا يكون لها جزء » ، « المستقيم هو طول ليس له عرض » . أما البديهيات فقد قسمها إلى بديهيات axioms ومسلمات postulates :



فيثاغورث (٥٨٠ - ٥٠٠ق.م)



إقليدس (٣٣٠ - ٢٧٥ ق.م)

١ - بديهيات إقليدس :

(١) الأشياء التى تساوى شىء تكون متساوية .

(٢) إذا أضيفت متساويات إلى متساويات فالمجموع يكون متساويا .

(٣) إذا طرحت متساويات من متساويات فان الباقى يكون متساويا .

(٤) الأشياء التى تنطبق على بعضها تكون متساوية .

(٥) الكل أكبر من الجزء .

٢ - مسلمات إقليدس :

(١) المستقيم يمكن أن يرسم من نقطة إلى نقطة أخرى .

(٢) القطعة المستقيم المحدودة يمكن أن تمتد إلى خط مستقيم .

(٣) يمكن وصف الدائرة بأى نقطة كمركز و بنصف قطر مساوى لأى قطعة مستقيمة محدودة مرسومة من المركز .

(٤) كل الزوايا القائمة تساوى بعضها البعض .
(٥) من أى نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازى المستقيم المعلوم .

وبتكوين النظام الهندسى لاقليدس من التعريفات والبديهيات والفروض والنظريات المشتقة اعتقد إقليدس أنه خلق أساسا كافيا لبنائه الهندسى أى لتقديم الأفكار الهندسية والاستنتاج المنطقى لخواصها . إلا أن هذا ليس صحيحا فقد تعرضت هندسة إقليدس للنقد . فمثلا افترض إقليدس فى أحد براهينه أنه إذا كانت ثلاثة نقط على استقامة واحدة فان إحداها تكون بين الاخرتين دون أن يذكر ذلك فى بديهياته كما ينقص نظامه بديهية عن الاستمرار مع أنه أخذ فى الاعتبار استمرار المستقيمات والمثلثات والدوائر والأشكال الهندسية . وكذلك مفهوم التطابق يحتاج إلى تكملة وتصحيح . وقد أدت دراسة عيوب هندسة إقليدس ودراسة استقلال المسلمة الخامسة (وهى ما تعرف بمسلمة أو بديهية التوازى) إلى اكتشاف الهندسيات اللاإقليدية فى القرن التاسع عشر. (كما سنناقش ذلك فى هذا الباب وفى الباب الرابع عند تدريس الهندسة) .

ولو أن الاهتمام الأكبر للاغريق كان نحو الهندسة إلا أن رياضى الاغريق قد أسهموا فى فروع أخرى للرياضيات . فمثلا أسهم أبولونيوس فى دراسة القطع المخروطية . وأسهم زينو وايودكس فى موضوع اللانهايات والأفكار الأولية فى التكامل عن طريق ايجاد مساحات أو حجوم الأشكال الهندسية بتقسيمها إلى أشكال بسيطة بعدد لانهائى وايجاد مجموعها ــ وهى الطريقة التى نتبعها فى المراحل المبكرة لايجاد مساحة الدائرة مثلا عن طريق تقسيمها إلى مثلثات بعدد لانهائى وايجاد مجموع مساحات هذه المثلثات .

وقد وضع أرشميدس قواعد الميكانيكا ، خاصة ميكانيكا الروافع والسوائل ومعظمنا يعرف قصته التى اكتشف بها قانون الأجسام الطافية . وأوحت دراسة أرشميدس فى استمرار الأشكال أن يكتشف العالم الرياضى الحديث ديدكند بديهية الاستمرار التى تسمى بديهية : « أرشميدس وديدكند » فى

بعض الأحيان . وكذلك نجد أن خط الأعداد الحقيقية مرتبط أيضا بأرشميدس وديدكند .

وقد كان أرشميدس فخوراً باكتشافه لكيفية حساب حجم الكرة . حيث وجد أن حجم الكرة مساوى لثلثى حجم أصغر أسطوانة تحوى الكرة واستخدم فى البرهان تقسيم الشكل إلى أشكال صغيرة تقسيما لانهائيا مع البرهان بالتناقض ، أى يصل إلى تناقض إذا فرض أن الحجم أكبر من ثلثى الاسطوانة أو أصغر من حجم ثلثى الاسطوانة .

وقد استخدم نفس الطريقة فى إيجاد مساحات الاشكال التى تحدها منحنيات لقطوع مخروطية أو حلزونية وفى حساب حجوم الأشكال الناتجة من الدوران .

واعتنى الاغريق بالجبر ولكنهم اعتبروه جزءاً من الحساب . وكان يغلب فى حلول مسائلهم الحالات الخاصة . فاستعمل ديوفانتس فى كتابه فى الحساب بعض الرموز وتعرض لمعادلات من الدرجة الأولى والثانية وأوجد جذراً واحداً للمعادلة حتى ولو كان لها جذران . فمثلا أوجد جذر المعادلة ٨٤ س^{٢} + ٧ س = ٧ وهو $\frac{١}{٤}$ وكان يأتى لكل مسألة بحل خاص ولم يتوصل إلى حل عام . وقد حل بعض علمائهم معادلات بسيطة من الدرجة الثالثة وحل أرشمدس بعض المعادلات بواسطة تقاطع المنحنيات

أما بالنسبة لحساب المثلثات فلم يكن منفصل عن الهندسة وتوصل هيباخوص و بطليموس إلى القانون حا^{٢} ب + حتا^{٢} ب = ١ أما هيرون فاستعمل بعض القوانين فى إيجاد مساحة المضلعات المنتظمة . أما مينالوس فقد توصل إلى علاقات بين أضلاع المثلث فاليه تنسب النظرية : « فى المثلثين الكرويين أ ب حـ ، د هـ و وفيهما : ∡أ = ∡د ، هـ = ∡د يكون

$$\frac{\text{وتر ضعف القوس أ ب}}{\text{وتر ضعف القوس ب حـ}} = \frac{\text{ووتر ضعف القوس د هـ}}{\text{ووتر ضعف القوس هـ و}}$$

ومن المشوق أن نعرف ما قدمه فيثاغورث فى دراسة الأعداد . فقد اكتشف

الأساس الرياضي للتقسيم الموسيقى حيث وجد علاقة بين التوافق الموسيقى والأعداد الطبيعية ١ ، ٢ ، ... وقد جعله ذلك يتنبأ بأن كل العالم الطبيعى قائم على نمط الأعداد الطبيعية وكان ينظر إلى الأعداد نظرة مقدسة حتى قال أن الرب هو عدد و يقصد عدد طبيعى . ولكنه أصيب بهزيمة عندما اكتشف أن الأعداد الطبيعية غير كافية للبناء الرياضى حتى بالمعلومات البدائية التى يعرفها ، وهى أن الأعداد $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ لايمكن التعبير عنها بكسر اعتيادى بسطه ومقامه عدد طبيعى .

٣.٢ ــ الرياضيات عند العرب :

يتمثل دور العرب فى تطور الرياضيات فى نقلهم للعلوم الرياضية القديمة (المصرية ، البابلية ، الاغريقية ، الهندية) ونموها ، فقد هذب العرب النظام العدى العشرى الذى وضعه الهنود ووضعوه بالصورة المستعملة فى عصرنا . ووضعوا أسس الجبر وجعلوه مادة منفصلة عن الحساب . وكذلك بالنسبة لحساب المثلثات جعلوه علماً منفصلا عن الفلك ووضعوه فى الصورة التى نألفها الآن . وقد بين قدرى طوقان فى كتابه «تراث العرب العلمى فى الرياضيات والفلك» مآثر العرب فى فروع الرياضيات المختلفة : الحساب ، الجبر ، حساب المثلثات ، وفى الفلك مع بيان من أسهموا من العرب فى تقدم هذه الفروع فى العصور المختلفة وسنتكلم باختصار فيما يلى عن بعض ما قاموا به فى هذا المضمار ونترك للقارىء الرجوع إلى هذا الكتاب للدراسة التفصيلية .

كان لتهذيب العرب للنظام العدى (القائم على فكرة الخانه)وأخذ الصفر (عن الهنود) ووضعه كشاغل مكان فوائده الكبيرة فى تسهيل الترقيم وتسهيل العمليات الحسابية . والعرب هم الذين وضعوا العلامة العشرية و ينسب إختراع الكسور العشرية إلى غياث الدين الكاشى (سنة ٧٤٥ هـ) . وقد أعطى الكاشى قيمة ٢ ط صحيحة لستة عشر رقماً عشرياً كما يلى :

٢ ط = ٦,٨٣١٨٥٠٧١٧٩٥٨٦٥

وكذلك كتب عن الكسور الستينية والعشرية واستعمالاتها . وكان العرب يقسمون الحساب إلى أبواب ، منها ما يتعلق بحساب الصحاح (أى

حساب الأعداد الصحيحة) ، ومنها ما يتعلق بحساب الكسور و يذكرون فى كل منها أعمالا مختلفة يضعونها فى فصول مثل : الجمع والتضعيف ، التنصيف ، التفريق (الطرح) ، الضرب ، القسمة ، التجذير واستخراج الجذور . وكان لهم طرق كثيرة لاجراء العمليات ومن المشوق أن نقدم طريقة من طرقهم فى الجمع وطريقة لهم فى الضرب نوضحهما فى شكلى (٢) و (٣ـــ أ) .

	جمع الأعـــداد
	٣٧٧٢ ٥٤١٧٩ ١٠٥
المحفوظات	١١١
المجموع	٥٨٠٥٦

شكل (٢)

شكل (٣ ـــ أ)

فشكل (٢) يوضح طريقتهم فى جمع الأعداد ٣٧٧٢ ، ٥٤١٧٩ ، ١٠٥ حيث تبين خانة المحفوظات الأعداد المحمولة أثناء عملية الجمع . أما شكل (٣ـــ أ) فيبين أحد طرقهم فى ضرب العددين ٢٣٥ ، ٤٧ .

حيث ترتب المربعات فى صفين .كل صف يحوى ثلاثة مربعات توضع فوقها العدد ٢٣٥ وعلى جانبها العدد ٤٧ . ثم توضع حواصل الضرب الجزئية الناتجة من ضرب ٧ فى كل من ٥ ، ٣ ، ٢ فى مربعات الصف الأول مبتدئين من العمود الأول على اليمين ، وحواصل الضرب الجزئية الناتجة من ضرب ٤ فى كل من ٥ ، ٣ ، ٢ فى مربعات الصف الثانى مبتدئين من العمود الأول على اليمين . أى توضع كل من حواصل الضرب الجزئية فى المربع الذى يتقاطع

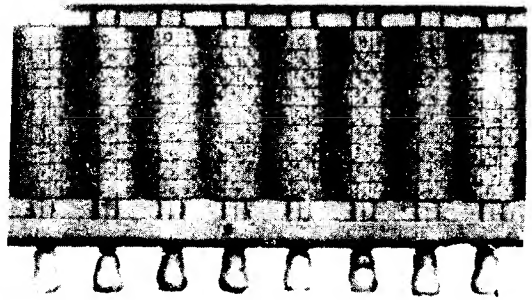
فيه الصف والعمود المناظر للرقمين المضروبين ، وذلك بحيث يوضع رقم الآحاد لحاصل الضرب الجزئى فوق قطر المربع الموجود فيه ورقم العشرات تحت هذا القطر. لاحظ أن ٤ × ٢ = ٨ كتبت « ٠٨ » حيث وضعت ٨ أعلى قطر المربع ، « ٠ » أسفل القطر لتدل على عدم وجود العشرات . لايجاد حاصل الضرب نجمع على الأقطار مبتدئين من ركن أقصى اليمين مع الحمل إلى الأقطار التالية إذا كان ضروريا . فمن شكل (٣ ــ أ) يتضح أن حاصل الضرب هو ١١٠٤٥ حيث نتج رقم الآحاد ٥ فى حاصل الضرب من رقم الآحاد ٥ للعدد ٣٥ (الموضوع أعلى قطر المربع) أما رقم العشرات فى حاصل الضرب وهو ٤ فنتج من جمع ١ + ٣ + ١٠ (على القطر التالى) أما المئات فى حاصل الضرب فتنتج من جمع ٤ + ٢ + ٢ + ٢ = ١٠ ، بوضع الصفر وحمل ١ وجمعه على الأعداد ١ ، ٨ ، ١ ينتج عدد الآلاف ١١ لحاصل الضرب .

وتعرف هذه الطريقة للضرب بطريقة التكعيبات Lattice أو طريقة جيلوسيا Gelosia للضرب . وقد ظهرت فى الكتب (المدرسية) المنشورة فى ايطاليا سنة ١٤٧٨ م . ومنها استمد نابير (١٥٥٠ ــ ١٦١٧) فكرته لعمل ماكينته الحاسبة للضرب . وهى تتكون كما فى شكل (٣) ب من شرائح تسمى قضبان نابير عليها الأعداد من ١ إلى ٩ مع العمود « ن » . ولضرب ٨ × ٥٧٦ مثلا ترتب القضبان التى أعلاها الأرقام ٥ ، ٧ ، ٦ كما فى شكل (٣) جـ و يقرأ حاصل الضرب من الصف الذى يقابل ٨ فى العمود ن . كما فى شكل (٣) د . أنظر شكل الماكينة (٣) هـ .

وجدير بالذكر أن طريقة التكعيبات للضرب المأخوذة عن العرب تستخدم الآن فى بعض البرامج الحديثة لتدريس رياضيات المرحلة الابتدائية ، حيث تستخدم كطريقة لتحقيق صحة الاجابة بجانب كونها طريقة شيقة للضرب توضح الخطوات والاجراءات المتبعة وأساسها . فأى خطأ فى حاصل الضرب يمكن ملاحظته فورا بالنظر على حواصل الضرب الجزئية ، أوعلى الجمع على الأقطار. وعلى ذلك يستطيع المدرس أن يقف على ما الذى يعرفه التلميذ وما يحتاج إليه من تدريب . هذا وتستخدم أيضا قضبان نابير التى تعتمد على فكرة طريقة التكعيبات للضرب فى بعض البرامج الحديثة كوسيلة للضرب .

ن	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١	٠/١	٠/٢	٠/٣	٠/٤	٠/٥	٠/٦	٠/٧	٠/٨	٠/٩
٢	٠/٢	٠/٤	٠/٦	٠/٨	١/٠	١/٢	١/٤	١/٦	١/٨
٣	٠/٣	٠/٦	٠/٩	١/٢	١/٥	١/٨	٢/١	٢/٤	٢/٧
٤	٠/٤	٠/٨	١/٢	١/٦	٢/٠	٢/٤	٢/٨	٣/٢	٣/٦
٥	٠/٥	١/٠	١/٥	٢/٠	٢/٥	٣/٠	٣/٥	٤/٠	٤/٥
٦	٠/٦	١/٢	١/٨	٢/٤	٣/٠	٣/٦	٤/٢	٤/٨	٥/٤
٧	٠/٧	١/٤	٢/١	٢/٨	٣/٥	٤/٢	٤/٩	٥/٦	٦/٣
٨	٠/٨	١/٦	٢/٤	٣/٢	٤/٠	٤/٨	٥/٦	٦/٤	٧/٢
٩	٠/٩	١/٨	٢/٧	٣/٦	٤/٥	٥/٤	٦/٣	٧/٢	٨/١

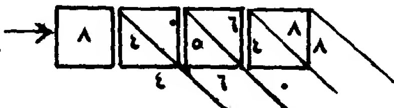
شكل (٣ـ ب)



شكل (٣ـ هـ)

ن	٥	٧	٦
١	٠/٥	٠/٧	٠/٦
٢	١/٠	١/٤	١/٢
٣	١/٥	٢/١	١/٨
٤	٢/٠	٢/٨	٢/٤
٥	٢/٥	٣/٥	٣/٠
٦	٣/٠	٤/٢	٣/٦
٧	٣/٥	٤/٩	٤/٢
٨	٤/٠	٥/٦	٤/٨
٩	٤/٥	٦/٣	٥/٤

شكل (٣ـ جـ)



شكل (٣ـ د)

وقد أخذ العرب الأعداد وتعمقوا فى دراستها . وكانوا (كما كان الاغريق من قبل) يرون فى الأعداد نوعا من التقديس . وقسموا الأعداد إلى أزواج وأفراد (أعداد زوجية وفردية) ، وقسموا الأعداد من جهة أخرى إلى ثلاثة أنواع : أعداد تامة ، أعداد زائدة ، أعداد ناقصة . والعدد التام هو العدد الذى يساوى مجموع أجزائه مثل ٦ ، ٢٨ (هنا ٦ = ١ + ٢ + ٣ ، ٢٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤) والعدد الزائد هو ما يكون أقل من مجموع أجزائه مثل ١٢ . (هنا ١٢ < ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٦) والعدد الناقص هو ما يكون اكبر من مجموع أجزائه مثل ١٠ (هنا ١٠ > ١ + ٢ + ٥) .

وقد أوجدوا قاعدة للأعداد المتحابة (أوجدها ثابت بن قره) . والعددان المتحابان يكون مجموع أجزاء احدهما مساو يا للآخر مثل ٢٢٠ و ٢٨٤ (هنا مجموع أجزاء ٢٨٤ = ١ + ٢ + ٤ + ٧١ + ١٤٢ = ٢٢٠ وكذلك مجموع أجزاء ٢٢٠ = ٢٨٤ إذ أن مجموع أجزاء ٢٢٠ = ١ + ٢ + ٣ + ٥ + ١٠ + ١١ + ٢٠ + ٢٢ + ٤٤ + ٥٥ + ١١٠ = ٢٨٤) .

وقد عرفوا المتواليات الحسابية والهندسية على أنواعها وذكروا قوانين خاصة بمجموعها ، وتوصلوا لقوانين مجموع الأعداد الطبيعية ، ومجموع مربعاتها ، ومجموع مكعباتها ، ومجموع قواها الرابعة .

٢ ــ الجبر :

العرب لهم دور كبير فى إرساء علم الجبر وأول من استعمل لفظ « الجبر » على هذا الفرع من الرياضيات ووضع أصوله هو الخوارزمى (فى زمن المأمون ــ وقد توفى ٢٣٢ هـ) وكان كتابه « الجبر والمقابلة » مصدر أساسى للعرب وللغرب فى الجبر . وقد نشر د . مشرفة ومحمد رسى أحمد سنة ١٩٣٧ هذا الكتاب عن مخطط محفوظ بأكسفورد كان قد كتب فى مصر بعد موت الخوارزمى بحوالى ٥٠٠ سنة .

(*) ب س + ٢ حـ = س^{٢} + ب س - حـ تبعا للخوارزمى تصبح بالجبر ب س + ٢ حـ + حـ = س^{٢} + ب س وبالمقابلة تصبح ٣ حـ = س^{٢} أى يعنى بالجبر نقل الطارح (الكمية السالبة) من طرف إلى الطرف الآخر للمعادلة و يعنى بالمقابلة (الحذف) تجميع المجاهيل أو الحدود المتشابهة فى كل طرف .

وقد استخدم الخوارزمي الجذر ليدل على المجهول أو المتغير (س) ، والمال ليدل على ($س^٢$) ، والعدد المفرد ليدل على الحد المطلق (الخالى من س) ، والمكعب ليدل على ($س^٣$) ، ومال المال ليدل على ($س^٤$) .. وهكذا . وكذلك استخدم جزء الجذر ليدل على $\left(\frac{١}{س}\right)$ وجزء المال ليدل على $\frac{١}{س^٢}$ ، ...

وقد توصل العرب إلى حل المعادلات من الدرجة الثانية بطريقة غير رمزية . وأوجدوا جذريها إذا كان الجذران موجبين ، وتنبهوا إلى الحالة التى يكون فيها الجذر تخيلى ، وحل العرب معادلات من قوى أعلى على الصورة

$$م س^{٢ن} + ب س^{ن} = حـ$$

وحلوا مسائل يؤدى حلها إلى معادلات آنية من الدرجة الثانية مثل :

$$س^٢ + ص = ط^٢ \quad ، \quad ص^٢ + س = ن^٢$$

$$س ص + س = ط^٢ \quad ، \quad س ص + ص = ن^٢$$

وابتكر العرب طرقا هندسية لحل بعض معادلات من الدرجة الثانية وبذلك يكونون قد وضعوا أساسا للهندسة التحليلية . فمثلا قدم الخوارزمي طريقة هندسية لحل المعادلة : « مال وعشرة أجذاره تعادل ٣٩ فما العدد » .

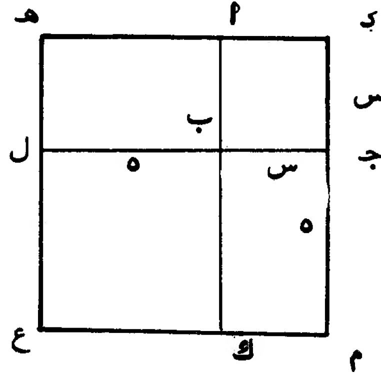
أى المعادلة $س^٢ + ١٠ س = ٣٩$.

وتتمثل طريقته (كما نبسطها هنا) فى رسم مربع طول ضلعه س وليكن المربع أ ب حـ د كما فى شكل (٤) . ثم يمد د حـ إلى م حيث يكون طول حـم $= \frac{١٠}{٢} = ٥$ (أى نصف معامل س) . و يكمل المربع د م ع هـ الذى طول ضلعه س + ٥ هنا يكون $س^٢ + ١٠ س$ مساو يا مجموع مساحات المربع أ ب حـ د ، المستطيلين ب حـ م ك ، هـ أ ب ل .

ولكون $س^٢ + ١٠ س = ٣٩$ يضاف مساحة المربع ل ب ك ع الذى يساوى ٢٥ إلى الطرفين ينتج أن :

$س^٢ + ١٠ س + ٢٥ =$ مساحة المربع أ ب حـ د + مساحة المستطيل ب حـ م ك + مساحة المستطيل هـ أ ب ل + مساحة المربع ل ب ك ع $= ٣٩ + ٢٥ = ٦٤$.

ومساحة المربع هـ د م ع = ٦٤ أى طول ضلعه د م = ٨ وهذا يؤدى إلى طول د حـ = س = ٣ و بذلك ينتج أن الجذر المطلوب س هو ٣ .

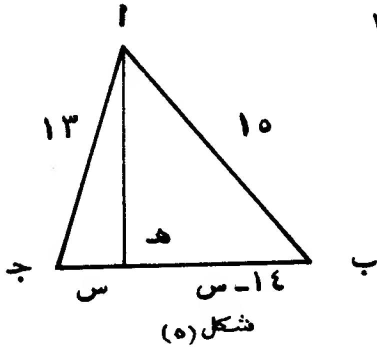


شكل (٤)

وكذلك قدم الخوارزمى طريقته الهندسية فى حل معادلة من النوع

$$\text{س}^{٢} = ٣\text{س} + ٤$$

وقد استعان العرب بالجبر لاول مرة فى التاريخ فى حل المسائل الهندسية مثل ايجاد المساحات . فمثلا عند حساب مساحة المثلث التى أطوال أضلاعه ١٥ ، ١٤ ، ١٣ اتبعوا طريقة لغوية تكافىء الحل : من الشكل (٥)



شكل (٥)

$$١٥^{٢} - (١٤ - \text{س})^{٢} = ١٣^{٢} - \text{س}^{٢}$$

ومنها س = ٥

وهـذه تـؤدى إلى أن

$$\overline{\text{أهـ}}^{٢} = ١٣^{٢} - ٥^{٢} = ١٤٤$$

ومنها طول $\overline{\text{أهـ}}$ = ١٢ ، ومساحة

$$\text{المثلث المطلوب} = \frac{١٤ \times ١٢}{٢} = ٨٤$$

وقد وضع العرب حلولا جبرية وهندسية لمعادلات متنوعة التركيب قاموا بابتداعها ، كما استعملوا منحنى Conchoid فى تثليث الزاوية . واستعمل

علماء العرب ـ بعد الخوارزمي ـ الرموز فى الأعمال الرياضية وسبقوا الغرب فى ذلك فقد سبقوا فيتا (فى القرن السادس عشر) الذى وضع مبدأ استخدام الرموز فى الجبر حيث استخدم :

«٣ فى مربع أ ـ ٤ فى أ بمفردها + ٦ تساوى صفر» لتدل على

٣ س^{٣} ـ ٤ س + ٦ = صفر

وكذلك سبقوا ستفتسن (فى نهاية القرن السادس عشر) الذى استخدم

٢ ق ق + ٤ حـ + ١ ق ـ ٥ ن + ٦ = صفر لتدل على

٢ س^{٤} + ٤ س^{٣} + س^{٢} ـ ٥ س + ٦ = صفر

فقد استخدم القلصادى من علماء العرب (ولد فى ١٤٦٢م) الحرف الأول من كلمة جذر حـ لتدل على علامة الجذر (أى لتدل على $\sqrt{\ }$) ، واستخدم أيضا ما يأتى :

ش الحرف الأول من شىء لتدل على المجهول (أى لتدل على س)

م الحرف الأول من مال لتدل على مربع المجهول (أى لتدل على س^{٢})

ك لتدل على المكعب (أى لتدل على س^{٢})

∴ لتدل على علامة النسبة (أى لتدل على العلامة :) ، واستخدم لعلامة الجمع عطفا بلا واو . كما استخدم ل لتدل على علامة التساوى (أى لتدل على العلامة =)

             م ش   حـ

فمثلا ٤٩ تدل على $\sqrt{٤٩}$ ، ١ ١٩ ل ٣٨ تدل على س^{٢} + ١٩ س = ٣٨

فمثلا حل العرب بعض معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة واكتشفوا النظرية التى تقول «مجموع مكعبين لا يكون عددا مكعبا» وهى أساس لنظرية فرما التى تقول «أ^{ن} + ب^{ن} = حـ^{ن} لا يمكن حلها عند ن > ٢ .

وبحث العرب فى نظرية ذات الحدين . وكان قد قدم إقليدس مفكوك مقدار جبرى ذا حدين بأس اثنين .

ولكن الخيام لو أنه لم يعط قانونا عاما إلا أنه تمكن من ايجاد المفكوك عندما يكون الأس ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ بواسطة قانون خاص اكتشفه . كما أوجد العرب بالبرهان مجموع الأعداد لطبيعية مرفوعة حتى القوة الرابعة واعتنوا بالجذور الصم واستعملوا كلمة صم لتدل على العدد الذى لا جذر له . واستعمل الغرب بعد ذلك معنى الكلمة لتدل على نفس الغرض (Surd لتعنى أخرس أو أطرش deaf, mute) .

و يعتقد قدرى طوقان أن العرب مهدوا لاختراع اللوغريتمات . فهو يعتقد أن ابن يونس ، وابن حمزه المغربى سبقا نابير، و بورجى فى تقديمهما للوغريتمات .

فابن يونس هو أول من توصل إلى القانون

حتا س حتا ص = $\frac{1}{2}$ حتا (س + ص) + $\frac{1}{2}$ حتا (س ــ ص)

وهو كما يقول سوبر : « كان لهذا القانون أهمية كبرى قبل اكتشاف اللوغريتمات عند علماء الفلك فى تحويل العمليات المعقدة لضرب العوامل المقدرة بالكسور الستينية فى حساب المثلثات إلى عمليات جمع » .

أما ابن حمزة فقد توصل إلى : « أس أساس أى حد من حدود متوالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يساوى مجموع أس أساس الحدين اللذين حاصل ضربهما يساوى الحد المذكور ناقصا واحدا)

أى توصل إلى التناظر :

١	٢	٤	٨	١٦	٣٢
١	٢	٣	٤	٥	٦

فمثلا ٢ × ٨ = ١٦ يناظر (٢ + ٤) ـ ١ = ٥

أما نابير و بورجى فكانا يستعملان التناظر

١	٢	٤	٨	١٦	٣٢
٠	١	٢	٣	٤	٥

٣ ــ الهنــدسة :

أخذ العرب كتاب إقليدس « الأصول » وترجموه إلى لغتهم وتفهموه جيدا وزادوا على نظرياته وكونوا بعض المسائل (المشكلات) العويصة وتفننوا فى حلولها . فقد قدم ابن الهيثم نظريات ومسائل منها : « كيف ترسم مستقيمين من نقطتين مفروضتين داخل دائرة معلومة إلى أى نقطة مفروضة على محيطها بحيث يصنعان مع المماس المرسوم من تلك النقطة زاويتين متساويتين » . كما قدم البيرونى (٩٣٨ ــ ١٠٤٨) برهانا لمساحة المثلث بدلالة أضلاعه وهو غير البرهان الذى أتى به هيرون من رياضى جامعة الاسكندرية (سنة ١٥٠ م) .

واستخدم ابن الهيثم (توفى ١٠٣٨ م) وغيره من العرب الهندسة المستوية والمجسمة فى أبحاث الضوء وتعيين نقطة الانعكاس فى أحوال المرايا الكرية ، والاسطوانية ، والمخروطية ، المحدبة منها والمقعرة . وتنبه الطوسى (ولد فى ١٢٠١ م) إلى بعض عيوب هندسة إقليدى وحاول اثبات بديهية التوازى فى محاولة اثبات استقلالها عن بقية البديهيات .

ونحب أن نشير إلى أن الغرب عرفوا هندسة إقليدس عن طريق العرب فترجموها عن العرب وأخذت تدرس فى مدارسهم حتى سنة ١٥٨٣ م حينما اكتشف أصل هندسة إقليدس اليونانى .

٤ ــ حساب المثلثــات :

للعرب دور كبير فى وضع حساب المثلثات بشكل منظم مستقل عن الفلك وفى الاضافات الهامة التى جعلت الكثيرين يعتبرونه علما عربيا كما اعتبروا الهندسة علما يونانيا .

واستعمل العرب لفظ « الجيب » (وهو اصطلاح هندى يكتب Jiva) بدلا من وتر ضعف القوس الذى كان يستعمله الاغريق . وهم أيضا أول من أدخل المماس فى ايجاد النسب المثلثية ، وتوصلوا إلى اثبات أن : « نسبة جيوب الأضلاع بعضها إلى بعض كنسبة جيوب الزوايا الموترة بتلك الأضلاع بعضها إلى بعض فى أى مثلث كروى » . ويمكن القول بأن العرب استطاعوا حل

معظم المسائل المختصة بالمثلثات الكروية . ونقلت مؤلفاتهم إلى اللاتينية وطبعت سنة ١٥٣٣ م .

واكتشف العرب كذلك بعض العلاقات بين الجيب والمماس والقاطع ونظائرها فقد توصل أبو الوفا (ولد ٩٤٠ م) إلى أن :

$$\text{٢ حا}^{٢}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{١} - \text{جتا س}$$

$$\text{حا س} = \text{٢ حا}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}}\;\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}}$$

حيث وصفهما على الصورة

$$\frac{\text{٢ نق} - \text{وتر (١٨٠} - \text{س)}}{\text{وتر}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{وتر}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\text{نق}} \qquad \text{وتر}\,\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{وتر}\left(\text{١٨٠} - \frac{\text{س}}{\text{٢}}\right) : \text{نق}$$

وتوصل أيضا إلى :

$$\text{حا (س} \pm \text{ص)} = \sqrt{\text{حا}^{٢}\,\text{س} - \text{حا}^{٢}\,\text{س حا}^{٢}\,\text{ص}} + \sqrt{\text{حا}^{٢}\,\text{ص} - \text{حا}^{٢}\,\text{س حا}^{٢}\,\text{ص}}$$

وعرف العلاقات

$$\text{طا س} = \text{حا س : جتا س}$$

$$\text{ظتا س} = \text{جتا س : حا س}$$

$$\text{قا س} = \sqrt{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\,\text{س}}$$

$$\text{قتا س} = \sqrt{\text{١} + \text{ظتا س}}$$

وتوصل العرب أيضا إلى معرفة القاعدة الأساسية لمساحة المثلثات الكروية وعملوا الجداول الرياضية للماس والقاطع وقاطع التمام . وأوجدوا طريقة لعمل الجداول الرياضية للجيب . واستعمل العرب طرق منوعة لعمل جداول بعضها قريب من طرق بطليموس والأخرى طرق مبتكرة .

وقد حل القبانى المعادلة $\frac{\text{حا س}}{\text{جتا س}} = ١$

حيث أوجد $\text{حا س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$

وتوصل أبن يونس (١١٥٦ — ١٢٤٢ م) إلى القانون

$$\text{حتا س حتا ص} = \frac{١}{٢} \text{حتا (س + ص)} + \frac{١}{٢} \text{جتا (س — ص}^{٢}\text{)}$$

٤.٣ — الرياضيات فى أوروبا حتى القرن الثامن عشر:

نقدم فيما يلى فكرة سريعة عن تطور الرياضيات فى الغرب فى هذه الفترة مع ذكر بعض الرياضيين الذين أسهموا فى هذا التطور.

١ — فى القرن الثانى عشر انتقلت الحضارة الاسلامية إلى الغرب مترجمة ولكن الغرب لم يشهد أى تقدم فى الرياضيات حتى القرن الخامس عشر حيث ابتدأ نمو الرياضيات واستخدامها فى الرى والفلك والمساحة . وفى منتصف ذلك القرن كانت الرياضيات تخص الحساب والجبر والهندسة وحساب المثلثات . واستخدمت بعض الرموز مثل + ، — فى حوالى سنة ١٥٠٠ م .

٢ — وفى القرن السادس عشر كان أعظم اكتشاف هو التوصل إلى حل معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة . وقد أشتغل أيضا بالأعداد القياسية وغير القياسية والتخيلية ، واستخدم الجبر وحساب المثلثات فى حل مسائل الهندسة .

٣ — شهد القرن السابع عشر اكتشافات عظيمة فى الرياضيات ووضع نواة للتوسع الكبير فى الرياضيات الذى نشهده . كما بدىء فى تطور الرياضيات التى تعتبر الآن رياضيات متقدمة (عالية) .

ولقد أدى التطور فى القرن السادس عشر فى بعض الموضوعات التى تحتاج إلى حسابات معقدة من مسائل (مشكلات) فى الفلك والمساحة والهندسة إلى الحاجة إلى اختراع طرق للحساب بدقة و بسرعة (وقد كان الترقيم العربى الهندى له دور فى تسهيل العمليات) .

وقد أدى ذلك إلى أن اخترع جون نابير وكذلك باسكال أول ماكينة

حاسبة سنة ١٦٤٢ . وفى سنة ١٦٧١ اخترع ليبنتز فى ألمانيا ومورلاند فى انجلترا سنة ١٦٧٣ ماكينات أخرى ولكنها كانت بطيئة وغير عملية ، إلا أنها كانت حافزا لاختراع الماكينات الحاسبة الحديثة فيما بعد ، وقدم نابيير اللوغريتمات بأساس هـ ثم بأساس ١٠ بعد ذلك . وقد قام بجهد كبير فى بلورة ومنطقة الجبر خاصة فى نظرية المعادلات واستخدمت فى هذا القرن الرموز الخاصة بمعظم العمليات والعلاقات ووضع جاليليو أساس الميكانيكا للأجسام الساقطة والديناميكا بوجه عام وتوصل إلى القانون ف = ½ حـ ن^{2} . وقد ساعد عمل جاليليو نيوتن فى تكميل علم الميكانيكا .

ولو أن عمل جاليليو كان عمليا وتجريبيا أكثر منه رياضيا إلا أنه توصل إلى أفكار رياضية مثل تكافؤ الفصول اللانهائية وهى فكرة أساسية فى نظرية الفئات نماها كانتور فى القرن التاسع عشر بعد ذلك فمثلا توصل جاليليو إلى أن عدد الأعداد فى مربعات الأعداد ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... هى نفس عدد الأعداد الطبيعية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

إلا أنه لم يستطع إثبات ذلك لأنه قائم على فكرة التناظر الأحادى التى لم تخطر على باله .

وقد قدم كبلر ثلاثة قوانين خاصة بحركة الكواكب وهى فى الواقع تطبيق لدراسة القطوع المخروطية المعروفة عند الاغريق منذ ٣٠٠٠ سنة إلا أنه قدم الجديد فى كثيرات السطوح ونظرية القطع المخروطية . وشهد القرن السابع عشر تقدما فى الهندسة . فقد قدم ديزارج و باسكال فرعا جديدا فى الهندسة هو الهندسة الاسقاطية وقدم ديكارت الهندسة التحليلية . ولو أن بعض أفكار هذه الهندسة عرفها الرياضيون من قبل إلا أن ديكارت نماها و بلورها فى علم خاص بها وجاء فرما للتوسع بمفاهيمها إلى فراغ ذى ثلاثة أبعاد وذى أربعة أبعاد وكان لذلك دور كبير فى النظرية النسبية . وقدم فرما أيضا أساسا لنظرية الأعداد واكتشف باسكال نظرية الاحتمالات وعرف أفكار التفاضل والتكامل ولكنه لم يطبقها فى صورة يمكن استعمالها حتى قدمها نيوتن بعد ١٠ سنوات بصورة أكثر تجريدا ، كما قدم ليبنيز أفكارا فى التحليل التجميعى

Combinatorial analvsis وخـطـط لمـنـطـق رمـزى قـدم فيه الخواص الأساسية للجـمع المنطقى والنفى وجبر الفصول والفصل الخالى والانضمام للفصل , ولم ينتبه إلى هذا الاختراع حتى ازدهر على يد جورج بول (١٨١٥ ــ ١٨٦٤) .

٤ ــ فى منتصف القرن الثامن عشر تبلورت معظم الموضوعات التى تسمى رياضيات ابتدائية بما فى ذلك الرياضيات التقليدية فى المرحلة الثانو ية ومدخل ريـاضـيـات الجامعة . ولو أنه استخدمت طرق مستحدثة فى التفاضل والتكامل إلا أنـه لم يعط اهتماما للتقارب والتباعد والأساليب اللانهائية و يرجع ذلك إلى أن الـريـاضيات كانت خاصة بالعدد والشكل وليس بالتركيب . وعلى أى حـال فـان الـقـرن الـثـامـن عشر شـهـد نموا كبيرا فى دراسة التفاضل والتكامل وتـطـبيقاته فى الميكانيكا والفلك فقد طبق جاكوب ، برنولى التفاضل والتكامل فى مسائل مختلفة وقدما الجديد فى حساب الغير calculas of variation .

كـما قدم ديموافر ، وتيلور ،وماكلورين ، ولامبرت ، لاجراتج ، أو يلر الجديد فى التفاضل والتكامل فمثلا نشر تيلور سنة ١٧١٥ .

$$\text{د}(\text{س}+\text{ا}) = \text{د}(\text{س}) + \text{ا}\,\text{د}'(\text{س}) + \frac{\text{ا}^{\text{٢}}}{\lfloor \text{٢}}\,\text{د}''(\text{س}) + \frac{\text{ا}^{\text{٣}}}{\lfloor \text{٣}}\,\text{د}'''(\text{س}) + \ldots$$

إلا أنـه لم يـأخـذ فـى الاعتبار تقارب المتسلسلات .وقد حاول لاجرانج أن يضع الـنـهـايـات فى صورة مجردة لـيبنى التفاضل والتكامل على أساس مجرد ولكن محـاولـته فشلت لأنها لم تعط اهتماما بتفاصيل التباعد والتقارب . وقد اشتغل لاجرانج فى نظرية المعادلات بما أدى جالوا إلى اختراع نظرية المجموعات . وقد عـامـل الـديـنـامـيكا بطريقة تحليلية مختلفة ومستقلة عن الطريقة الهندسية التى تـعـالـج بـهـا . وقد استخدم أينشتين نفس الطريقة عند اختراعه للنظرية العامة للنسبية فيما بعد .

ومن أهم الرياضيين الذين ساهموا فى هذا التطور فى هذه الفترة : ــ

١ ــ فـيـتـا Francoi Vietata (١٥٤٠ ــ ١٦٠٣) وهـو فـرنسى . وأ هـم انـجـازاته كـانـت فى تحسين نظرية المعادلات . وكان ممن استخدموا الحروف للتعبير عن الأعداد (خاصة المعاملات) .

وهو الذى أوجد قانون مجموع الجذرين وحاصل ضربهم للمعادلة من الدرجة الثانية الموجودة فى كتب المرحلة الاعدادية والثانوية .

٢ ــ نابيير John Napier (١٥٥٠ ــ ١٦١٧) . وهو انجليزى اسكتلندى . وأهم أعماله كانت فى اللوغريتمات .

٣ ــ كبلر Johann Kepler (١٥٧٠ ــ ١٦٣٠) وهو ألمانى . وأهم انجازاته كانت فى الفلك ، وفى الهندسة (على حساب أحجام ومساحات الأشكال) .

٤ ــ جاليليو Galileo Galilei (١٥٦٤ ــ ١٦٤٢) وهو ايطالى . وأهم انجازاته كانت فى الميكانيكا .

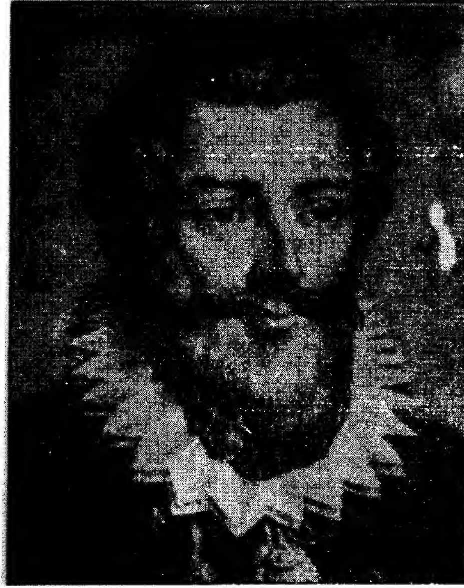
٥ ــ ديكارت René Descartes (١٥٩٦ ــ ١٦٥٠) وهو فرنسى . وأهم أعماله فى الهندسة التحليلية .

٦ ــ باسكال Blaise Pascal (١٦٢٣ ــ ١٦٦٢) وهو فرنسى . وأهم أعماله كانت فى نظرية الاحتمالات وقد اخترع أول ماكينة حاسبة .

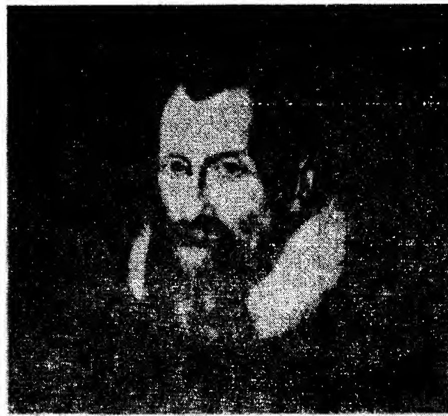
٧ ــ نيوتن Sir Isaac Newton (١٦٤٢ ــ ١٧٢٧) وهو انجليزى . وأهم انجازاته كانت فى التفاضل والتكامل ، ونظرية ذات الحدين ، والميكانيكا ، والضوء .

٨ ــ ليبنيز Gottfried Wilhm Leibniz (١٦٤٦ ــ ١٧١٦) وهو ألمانى . وأهم أعماله كانت فى التفاضل والتكامل ، وفى التبادل والتوافق والمنطق الرمزى وهو الذى وضع الرموز المختلفة مثل د (س) ، $\frac{د ص}{د س}$ ، ∫ .

٩ ــ أويلر Leonhard Euler (١٧٠٧ ــ ١٧٨٣) وهو ألمانى وقد كانت انجازاته فى كل ميادين الرياضيات الموجودة فى عصره . وكانت أهم أعماله فى علم التفاضل والتكامل حيث قدم التفاضل الجزئى وحساب التغير وتطبيقاتهما ، واشتغل بالأعداد المركبة ومعادلات جسم يدور حول نقطة وتوصل إلى قوانين كثيرة ، تعرف باسمه فى أفرع



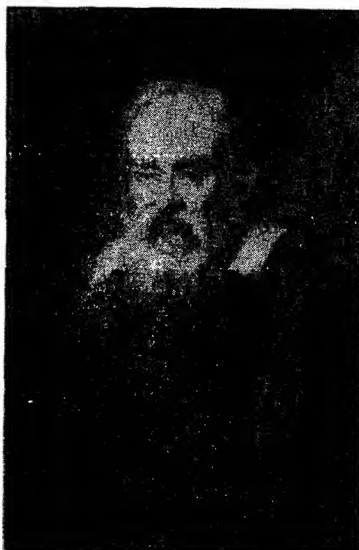
١ ـ فيتا (١٥٤٠ ـ ١٦٠٣)



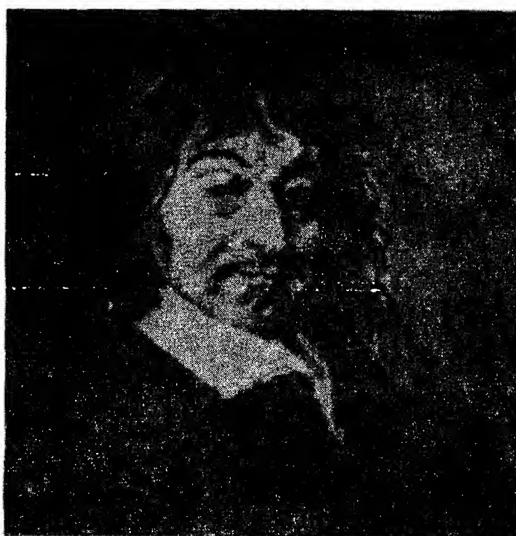
٢ ـ نابيير (١٥٥٠ ـ ١٦١٧)



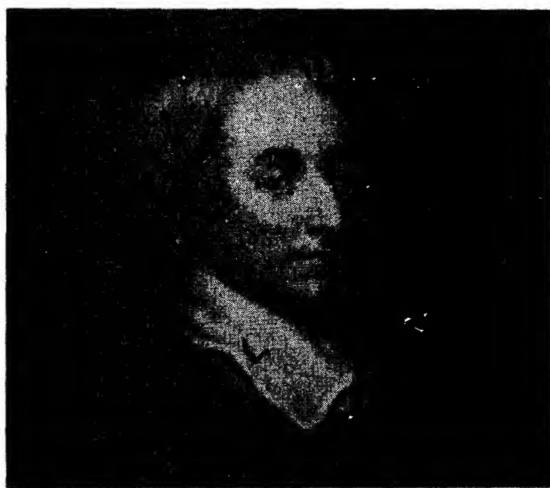
٣ ــ كبلر (١٥٧١ ــ ١٦٣٠)



٤ ــ جاليليو (١٥٦٤ ــ ١٦٤٢)



٥ ــ ديكارت (١٥٩٦ ــ ١٦٥٠)



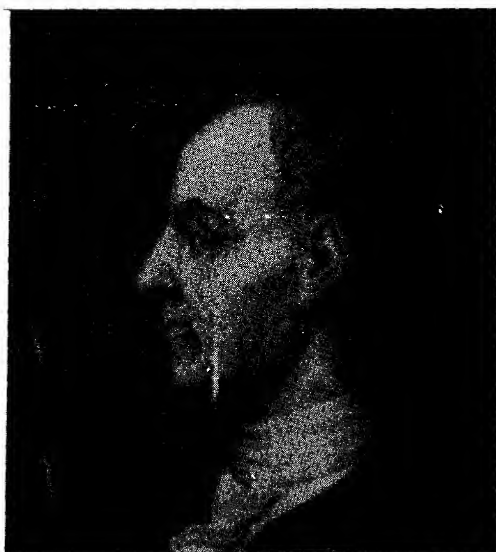
٦ ــ باسكال (١٦٢٣ ــ ١٦٦٢)



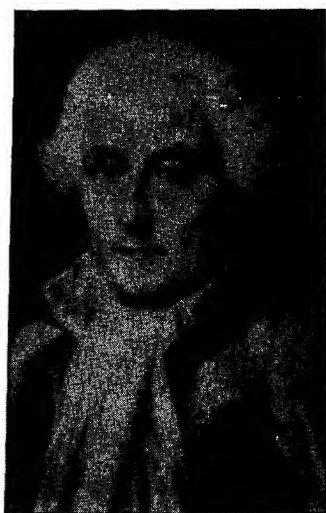
٧ ــ نيوتن (١٦٤٢ ــ ١٧٢٧)



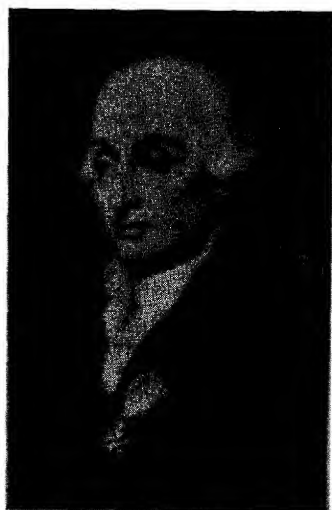
٨ ـ ليبنز (١٦٤٦ ـ ١٧١٦)



٩ ـ أويلر (١٧٠٧ ـ ١٧٨٣)



١٠ ــ لاجرانج (١٧٣٦ ــ ١٨١٣)



١١ ــ لابلاس (١٧٤٩ ــ ١٨٢٧)

الرياضيات المختلفة .. ومنها القانون الذى يربط بين الرؤوس أ ، والأضلاع ل ، والأوجه ج لجسم (كثير السطوح) وهو أ + ل - ج = ٢ .

١٠ — لاجرانج Joseph Louis Lagrange (١٧٣٦ — ١٨١٣)
وهو إيطالى فرنسى . وأهم أعماله كانت فى حساب التغير وتطبيقاته فى الديناميكا . وقد اشتغل أيضا فى نظرية الأعداد ، المعادلات ، والدوال التحليلية .

١١ — لابلاس Pierre Simon Laplace (١٧٤٩ — ١٨٢٧)
وهو فرنسى وأهم أعماله كانت فى التفاضل والتكامل ونظرية الاحتمالات التحليلية وفى الميكانيكا وقد قدم مفهوم محول لابلاس Laplace transform

$$\frac{\partial^2 ج}{\partial س_1^2} + \frac{\partial^2 ج}{\partial س_2^2} + \frac{\partial^2 ج}{\partial س_3^2} = \text{صفر}$$

الذى كان الأساس للنظرية التى قدمها هيفيسيد بعد ذلك فى حساب التفاضل والتكامل ذى العمليات operational calculus .

٥.٢ — الرياضيات الحديثة (رياضيات القرن التاسع عشر وما بعده) :

لقد كان من نتائج الاكتشافات العديدة فى الرياضيات وتطبيقاتها فى القرن الثامن عشر أن نشأت الحاجة إلى منطقة هذه الرياضيات ووضع أساس سليم لها ولذا توجه الاهتمام فى القرن التاسع عشر إلى دراسة أساسيات وأصول الرياضيات ووضع الرياضيات على أساس أكثر تجريدا وصلابة يحتمل نمواً وتوسعاً أكبر. فالنمو الكبير فى الرياضيات منذ القرن التاسع عشر لم يكن ليأتى إلا على أساس تعميق وتجريد لأساسياتها . وقلما حدث فى تاريخ الرياضيات أن وجدت ثورة لاتؤثر فقط فى الرياضيات العالية (المتقدمة) ولكن أيضا فى أساسياتها الأولية مثل ما حدث فى رياضيات القرن التاسع عشر والعشرين . و يطلق على رياضيات هذين القرنين الرياضيات الحديثة .

ووصف الرياضيات الحديثة بذلك لايكون وصفا للطرق التكنية الرياضية فقط ، ولكن أيضا لأصل ونمو فلسفة الرياضيات .

ففي القرن التاسع عشر كان من نتائج دراسة أساسيات الهندسة الأقليدية اختراع الهندسات اللاإقليدية ووضع الأساس البديهي المنطقي السليم لهذه الهندسات وفي هذا القرن أيضاً حدث تطور كبير في الجبر كنتيجة لدراسة تركيباته . أما في التحليل الرياضي فقد وضع أساس منطقي له وساعد ذلك في نموه الكبير. وقد أدى تعميم الدوال في منتصف القرن التاسع عشر إلى دراسة خواص فئات من الدوال مثل الدوال المستمرة ، الدوال التفاضلية ، الدوال التكاملية ، الدوال ذات التغير المحدود .

ويمكن القول بأنه في القرن التاسع عشر ظهر ونما التوبولوجي والجبر وحساب الأعداد الحقيقية إلا أن نمو التحليل الرياضي كان أكبر منهما .

وفي القرن العشرين أصبح للجبر والتوبولوجي نفس مقام التحليل الرياضي وفي نفس الوقت أصبح تقسيم الرياضيات مرن وغير مستقر فمنذ سنة ١٩٣٠ والتحليل الرياضي يدخل في الهندسة وحساب الأعداد الحقيقية أكثر من ذي قبل ، ووضع الجبر خطوط تركيباته في التحليل الرياضي . أي تداخلت أفرع الرياضيات كل منها يساعد و يتغذى من الأخر.

وفيما يلي سنقدم فكرة سريعة غن تطور الهندسة ، الجبر، التحليل الرياضي والتوبولوجي والرياضيات المطبقة في هذين القرنين .

١.٥.٢ ــ تطور الهندسة ، والجبر ، والتحليل الرياضي ، والتوبولوجي والرياضيات المطبقة :

١ ــ الهندسة :

لقد كان أول إنفصال عن هندسة إقليدس اختراع الهندسة

الاسقاطية (فى القرن السابع عشر) ولكن هذه الهندسة لم تنمو إلا لفترة محدودة لظهور الهندسة التحليلية من جهة ولعدم قيامها على أساس بديهى سليم من جهة أخرى. وقد قام هيلبرت بعد ذلك بوضع أساس بديهى لها فى القرن التاسع عشر.

وكان التحول من هندسة إقليدس يزداد لكثرة المعارضة للأساس البديهى الذى بنى إقليدس هندسته عليه. ومنذ عهد الاغريق قام بعض الرياضيين (مثل الطوسى، زخارى، لامبرت، ليجندر) بمحاولات لدراسة بديهية التوازى واستقلالها عن بقية بديهيات إقليدس. وفى القرن التاسع عشر اكتشف بولياى، لوبتشفسكى، جاوس مستقلين عن بعضهم البعض أن بديهية التوازى مستقلة عن بقية البديهيات الأخرى. و بأخذ بديهية بديلة لبديهية التوازى أمكن اختراع هندسات أخرى لا إقليدية. وقد أثبت هيلبرت بعد ذلك (١٨٨٩ــ١٩٠٣) أن هذه الهندسات متآلفة كتآلف نظام الأعداد الحقيقية. وتوسعت دراسة الهندسة على أيدى ريمان أحد تلامذة جاوس حيث اكتشف فصل من الفراغات العامة تسمى الآن فراغات ريمان منها ما هو ذا الانحناء الثابت وهو يناظر الفراغ الاقليدى، ومنها النوع الزائدى وهو يناظر فراغ بولياى، ومنها النوع الذى يناظر الفراغ الاسقاطى. وقد اكتشفت السطوح الريمانية عند الاشتغال بالمتغير المركب حيث ارتبطت خواص السطوح بخواص دوال مختلفة، ومن هذه الهندسة ظهر التوبولوجى.

٢ ــ الجبر:

جاء تطور الجبر فى القرن التاسع عشر بانفصال الجبر عن كونه تعميما للحساب إلى اكتشاف التركيبات الجبرية والجبريات التى فتحت الطريق للتعميم والتجريد الذى يخص علم الجبر الحديث. فقد اتضح لبعض الرياضيين (مثل بيكوك، جريجورى، وديمورجان) أن للجبر تركيب له خواص مثل خاصية الابدال والتنسيق والتوزيع.

وجاء اختراع هاملتون لجبر الرباعيات (١٨٤٢) غير الإبدالية حافزا للتوسع فى التركيبات الجبرية ثم قدم جراسمان فصول كاملة من الجبريات بينما قدم كيلى (١٨٥٧) جبر المصفوفات وهو أيضا غير إبدالى. وقد أدى ذلك إلى دراسة تركيبات جبرية مختلفة ولقد تمت دراسة أكثر من ٢٠٠ تركيب جبرى. ومن بين التركيبات الجبرية المختلفة ما له أهمية كبرى مثل المجموعات، نصف المجموعة، الحلقات، المجال الصحيح، التكعيبات، الحلقات البولية، الجبر البولى، الحقل، متجه الفراغ، جبريات جوردون، جبريات لاى (المجموعات المستمرة).

والمجموعات التى تعتبر من أهم التركيبات الجبرية ابتدأ ظهورها مقرونا بحل معادلات جبرية ذات درجة أعلى من ٣. فقد أثبت جاوس أن كل معادلات كثيرات الحدود لها على الأقل جذر مركب. وبين آبل وجالوا أنه فى معظم الحالات لايمكن التعبير عن الحلول بالصورة الجذرية (أى بقانون يحتوى على جذور على نظير القانون الخاص بجذرى المعادلة من الدرجة الثانية مثلا). وأثبت آبل (١٨٢٤) أن المعادلة العامة من الدرجة الخامسة لايمكن حلها (أى لايمكن التعبير عن الحل بالصورة الجذرية). وقد استمر ذلك إلى أن وضع جالوا مواصفات للحل واكتشف منه أن فئة التباديل لجذور المعادلة تحقق بعض الخواص الجبرية لتركيب أسماء المجموعة. وقد تحقق جالوا من أن دراسة هذه المجموعات الابدالية هى المفتاح لحل المعادلات. وقد اكتشفت المجموعات فى أحوال أخرى وتطور مفهومها على أيدى كيلى حتى أخذت الصورة التى نألفها الآن. ويتضح أهمية تركيب المجموعة ــ الذى يعتبر من أهم الانجازات الرياضية منذ سنة ١٨٠٠ ــ فى توحيده لأفرع مختلفة من الرياضيات، تبدو غير مرتبطة مع بعض وفى تطور ونمو الرياضيات وفى تطبيقاتها فى الطبيعة الرياضية وميكانيكا الكم ــ (فلقد ساعدت نظرية المجموعات فى التنبؤ بوجود جزيئات جديدة).

وقد بين كلين (١٨٧٢) دور مفهوم المجموعة فى توحيد الهندسات عن طريق دراسة اللامتغيرات الخاصة بكل هندسة تحت مجموعة التحويلات الخاصة بها. كما بين لاى (١٨٧١) عن طريق نظرية المجموعات المستمرة (أو مجموعات لاى) أن المجموعات هى جزء من التحليل الرياضى.

٣ ـ التحليل الرياضى analysis :

شهد القرن التاسع عشر تطورا كبيرا فى التحليل الرياضى، كما وضع الأساس المنطقى له أيضاً فى هذا القرن ولقد كان مبعث تطوره مشكلات فى الطبيعة الرياضية والفلك. ويتضح هذا من المشكلات التى قابلت هاملتون من عمله فى الضوء والديناميكا (١٨٢٧ ـ ٣٧)، والمشكلات التى قابلت لاى (١٨٧٣) عند تعامله مع المعادلات التفاضلية الديناميكية واكتشافه للمجموعات المستمرة التى لها دور كبير فى التوبولوجى والتحليل الحديث)، والمشكلات التى قابلت ماكسويل (١٨٧٣) فى الديناميكا الكهربية. كما أنه من نظرية الاحتمالات لكوموجوروف (١٩٢٢) أصبح واضحا أن مشكلات الميكانيكا الاحصائية مشكلات أساسية فى نظرية القياس ومعها تطور الفرع التجريدى للرياضيات الذى قام به ليبيه (١٩٠٢) من علم التكامل إلى أبعد مما عمله أرشميدس، كوشى، ريمان، إلى عالم الفراغات المجردة. وقد أدى ذلك إلى توحيد الطرق التحليلية على أيدى مور (١٩٠٦)، فرشيه (١٩٣٨). ويمكننا أيضا ملاحظة أثر المشكلات الالكتروستاتيكية ونظرية الوضع فى النصف الثانى من القرن التاسع عشر فى نمو نظرية المعادلات التفاضلية.

أما بالنسبة للأساس المنطقى للتحليل الرياضى. فقد قدم كوشى (١٨٢١) نظرية أكثر تجريدا للنهايات ووضح فيها تعاريف مقبولة للتقارب والاستمرار، والدوال التفاضلية، التكامل المحدود وهذه التعاريف هى الموجودة فى أى مدخل للتفاضل والتكامل فى المناهج

الحالية. إلا أن عمل كوشى كان محتاجا إلى أساس أعمق وذلك لأن نقطة البداية عنده كانت فكرة حدسية عن نظام الأعداد الحقيقية. ولذلك نشأت الحاجة إلى دراسة أكثر تجريدا للمفاهيم الأساسية للأعداد الحقيقية وقد قام بهذه الدراسات ڤيراستراس فى نهاية القرن التاسع عشر. وحيث أن حساب التحليل الرياضى يمتد جذوره فى الأعداد الحقيقية فان أفرعا كثيرة فى الرياضيات تعتمد جميعها على نظام الأعداد الحقيقية، وكما يقول البعض «أكثر الرياضيات المعاصرة لها نفس نظام الأعداد الحقيقية كأساس لها».

وقد تطورت أساسيات الأعداد الحقيقية على أيدى ديدكند، كانتور، ڤيرستراس فى نهاية القرن التاسع عشر عندما قدمت تعاريف الأعداد غيرالقياسية التى دفعت كانتور إلى اكتشاف نظرية الفئات خاصة اللانهائية وأعداد ما وراء اللانهايات (١٨٩٠ــ٩٧)، ومنها نشأ التوبولوجى التحليلى.

ومن الموضوعات الهامة الحديثة التى لها تطبيقات واسعة فى التكنولوجيا والتجارة نجد التحليل التجميعى combinatorial analysis الذى يشمل التباديل، نظرية الاحتمالات، وكذلك نظرية الألعاب التى نشأت من نظرية الاحتمالات، المجموعات. وقد ساهم كثير من الرياضيين فى تطويرها (مثل تشبشف، ماركوف)، وأصبحت ذات أهمية خاصة بعد استخدام الآلات الحاسبة. ولقد ظهرت أهميتها التطبيقية فى حل مشكلات الطبيعة مثل المشكلات المتعلقة بالحركة البروتونية للجزئيات والنظرية الحركية فى الغازات. إلا أن الأساس كان محتاجا إلى قاعدة أكثر صلابة وتجريدا وهذا ما قام به بوريل وليبيه. ولقد أدى هذا التطور إلى ظهور العمليات العشوائية stochastic processes التى لها تطبيقات فى الطبيعة والفلك والوراثة والاقتصاد والعلوم الانسانية.

ومن التطورات الحديثة ما يتعلق بالرياضيين الفلاسفة مثل هيلبرت، هوايتهد، راسل، برو ير الذين بدؤا أبحاثهم فى وضع المنطق الرمزى كتركيب رياضى على طريق ما عمله فى الأصل جورج بول فى منتصف القرن التاسع عشر.

٤ ــ التوبولوجى Topology :

كلمة توبولوجى مشتقة من الكلمة اليونانية TOΠOS وتقرأ توبوس وهى تعنى مكان أو موضع أو فراغ، وأول من استخدمها الرياضى الألمانى ليستنج (١٨٤٧) ليعنى هندسة الموقع. والتوبولوجى من النظريات (التركيبات) الحديثة فى الرياضيات التى نشأت فى القرن التاسع عشر وتبلورت فى القرن العشرين. ولو أن جذوره تمتد فى الهندسة والتحليل الرياضى إلا أنه بنموه استقل عنهما وأصبح الآن أداة تخدم كل الرياضيات. وقد نما التوبولوجى من نواحى هندسية كما فى التوبولوجى التجميعى (التوافقى) combinatorial على أيدى أويلر وموبيس وكلاين وريمان وتبلور على يد بوانكريه. ونما من التحليل الرياضى وكامتداد لنظرية الفئات كما فى التوبولوجى التحليلى (العام). ومن ثم فان نموه اتبع خطان أحدهما المجالات التى يُنظر فيها إلى الفراغات التوبولوجية على أنها تكوينات هندسية معممة و يكون التركيز فيها على تركيب الفراغات نفسها. ومن هذه المجالات التى استحدثت الهومولوجى (التوبولوجى الجبرى) على ايدى ايلنبرج وستينرود (١٩٣٠)، والكهومولوجى على يد أيلنبرج (١٩٤٥)، ودراسات الطى التى أثارتها أعمال بوانكريه (١٩٠٠)، ونظرية الأبعاد التى أثارتها أعمال ريمان (١٨٥٠ ــ ١٨٧٠). أما الخط الثانى ففى التحليل الرياضى حيث يُنظر إلى الفراغات التوبولوجية كحاملة للدوالة المستمرة حيث تحتل الدوال المستمرة أهمية كبرى فيها. ومن هذه المجالات نظرية باناخ، وفراغات هيلبرت، وجبريات باناخ، والنظرية الحديثة للتكامل (تكامل ليبيه)، ونظرية القياس، والتحليل التوافقى الحديث، والتحليل الدالى.

وهذا يوضح أن التوبولوجى أصبح أساسيا لمعظم الرياضيات المعاصرة. وعموما فالأساس النظرى لكل أنواع التوبولوجى هو تركيب الفراغ التوبولوجى والتوبولوجى التحليلى (العام). ويعتبر كانتور من الأوائل المخترعين للتوبولوجى التحليلى. فقدم دراسة لفئات جزئية من الفراغ التوبولوجى وعليها قدم المفاهيم الأساسية للتوبولوجى مثل الفئات المقفولة والفئات المفتوحة، والانغلاق، ونقط النهاية، والداخل، والخارج .... خاصة على خط الأعداد. أما تعريف الفراغ التوبولوجى عن طريق الفئات المفتوحة ويسمى توبولوجى الفئات المفتوحة point set topology فقدمه كيراتوسكى (١٩٢٢)، وعن طريق الجوار فقدمه هاوسدورف (١٩١٤). وقد سبقهما فرشيه (١٩٠٦) وريسز (١٩٠٧، ١٩٠٨) فى تعريف الفراغ التوبولوجى عن طريق تقارب المتتابعات ولكن تعريفاتهم كانت غير مرضية. وقدم كولموجروف (١٩٣٥) وريسز (١٩٠٧)، وهاوسدورف (١٩١٤)، وتشينوف (١٩٣٠) أنواع من الفراغات التوبولوجية على أساس بديهيات الانفصال.

وببساطة الأنواع (الأفرع أو المجالات) الأساسية للتوبولوجى :

- التوبولوجى التحليلى (توبولوجى فئات النقط) يتعامل مع المواد الصغيرة المكونة microscopic ويستخدم النقط والفئات فى وصف الفراغ التوبولوجى.
- التوبولوجى الهندسى (التجميعى) يتعامل مع المكونات الكبيرة macroscopic لتعميمات الأسطح التى تسمى طيات manifolds. وهو يدرس التكوينات الهندسية بتحليلها إلى أبسط الأشكال (مثل simplexes) التى تتصل مع بعضها بأسلوب منظم.
- التوبولوجى الجبرى يستخدم الطرق الجبرية خاصة نظرية المجموعات (الزمرة) والأصناف categories .

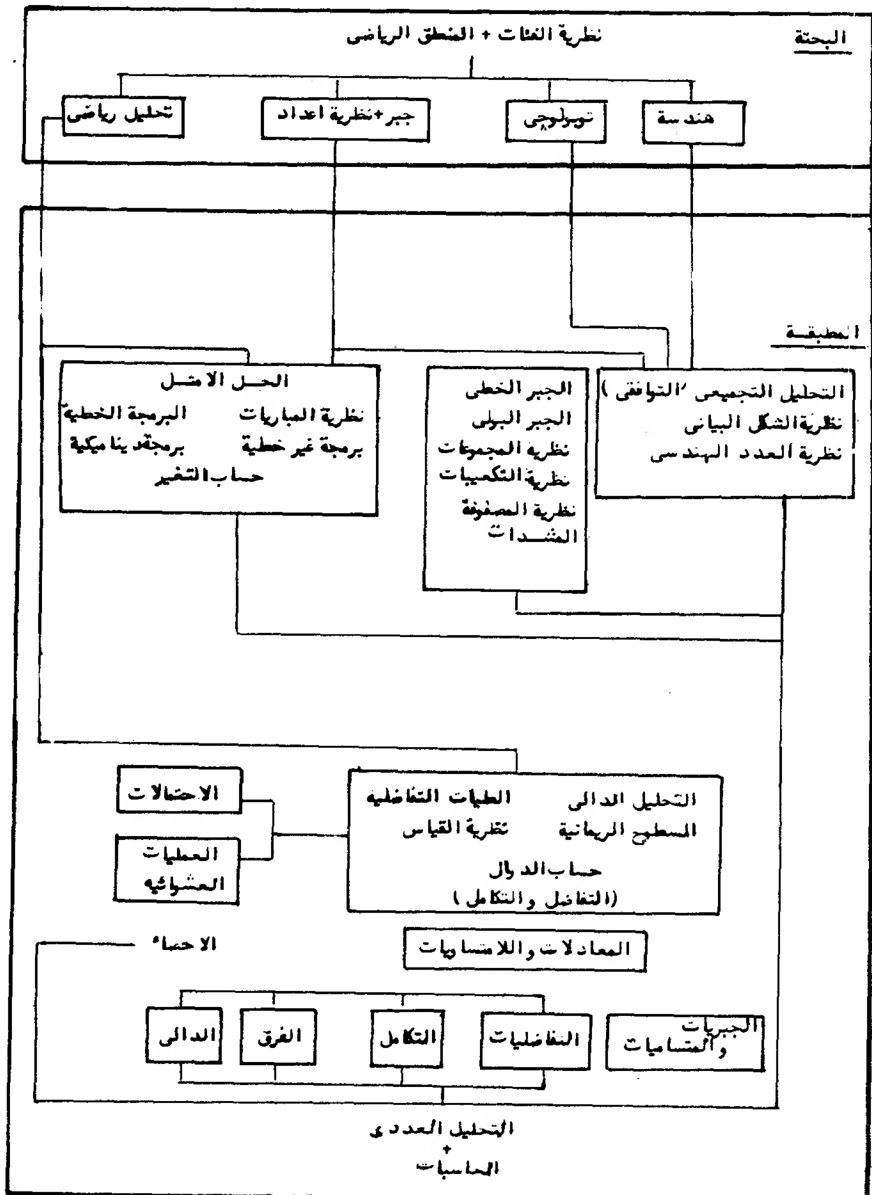
٥ ــ الرياضيات المطبقة applicable math. :

من المواد الأربع الأساسية السابقة : الجبر ــ التوبولوجى ــ الهندسة ــ التحليل الرياضى ، يتكون عديد من الوسائل tools الرياضية الحديثة التى لها تطبيقات فى كافة مجالات العلم والحياة المعاصرة. وهذه الوسائل الرياضية يُفضل تسميتها رياضيات مطبقة أكثر من تطبيقات الرياضيات لأنها وسائل مفاهيمة مزروعة بالفهم للمفاهيم المرشدة وقابلة للنمو والتطويع وليست مجرد تكنيكات أو طرق قصيرة سحرية. وهذه الوسائل الرياضية تفرش معظم مجالات الرياضيات المطبقة الحديثة ومنها : البرمجة الخطية وغير الخطية ، والتحليل العددى ، ونظرية الطوابير queuing ، والمعادلات التفاضلية stochastic ، والاحصاء غير البارامترى ، التحكم الذاتى automatic control . أىّ من هذه المجالات يتكون أو ينمو أساسيا من نسب مختلفة لهذه المواد الأربع الأساسية مع التحامها بنظرية الفئات والمنطق الرياضى لتصبح لها صفة موحدة مبسطة أخاذة.

هذه البساطة المميزة للرياضيات الحديثة أتت من خلال التجريد الموحد (من الخاص إلى الخاص) مما جعل لهذه الوسائل قوة الرافعة laverage الكبيرة لتستخدم فى فهم وتشكيل المواقف والأحوال الصعبة المعقدة التى تملأ العالم الواقعى الذى نعيش فيه.

شكل (٦) يبين مجالات الرياضيات المطبقة العديدة ونموها من المواد الأربع الأساسية : هندسة ــ توبولوجى ــ جبر ــ تحليل رياضى.

من هذه النبذة السريعة يتبين أن التقدم السريع المتزايد فى المادة يؤدى إلى أن يتمسك الرياضيون بالبحث عن أساس أكثر تجريد أو صلابة وهذا يؤدى بهم إلى زيادة العمق وفهم أساسيات المادة والانتقال من الخاص إلى العام. ولو أن بعض أفكار هذه الأساسيات ليس له نتيجة سريعة لحل المشكلات (خاصة فى المرحلة الاعدادية والثانوية) إلا أنه قد تبين عن طريق الرياضيين وعلماء النفس (كما



شكل (٦)
مجالات الرياضيات المطبقة من المواد الأربع الأساسية

سنرى فى الباب القادم) أنها أساسية ولازمة فى الفهم السليم للرياضيات . بالاضافة إلى أن هذا التقدم فى المادة أدى إلى نمو وسائل وتطبيقات عديدة للرياضيات .

وعموما فان الاتجاه الذى يميز الرياضيات الحديثة (وخاصة الرياضيات المعاصرة أو الاحدث) هو استخدام الطريقة البديهية (أى نظرية التركيبات الرياضية بصفة عامة) ونظرية الفئات فى تطور الرياضيات ونموها من جهة وفى محاولة تجميع الأبحاث فيها من جهة أخرى . وكما يقول البورباكيون عن الرياضيات الحديثة : «توجد رياضيات واحدة ، والوسيلة الوحيدة فى تطورها وتوحيدها هى الطريقة البديهية » .

وفيما يلى نعطى فكرة عن الطريقة البديهية (أى عن التركيبات الرياضية القائمة على النظام البديهى) ومميزاتها التى تحدد الصفة الرئيسية للرياضيات الحديثة (والمعاصرة أو الأحداث) ثم نقدم بعض الرياضيين الذين ساهموا فى بناء الرياضيات الحديثة .

٢.٥.٢ ـ التركيبات الرياضية القائمة على نظام البديهيات (المسلّمات) أو الطريقة البديهية :

التركيبات الرياضية هى الخطوط الرئيسية فى الرياضيات الحديثة . فالأفكار المشتركة للنظريات الرياضية تتضح خلال مفهوم التركيب . والتركيب الرياضى يتكون من :

١ ـ مسميات أو اصطلاحات أولية . وبلغة أخرى فئة من العناصر وفئة من الفئات . قد تكون هذه العناصر نقط أو مستويات أو أعداد . وعموما يجب أن تكون هذه الفئات عامة أى طبيعية عناصرها غير مهمة .

٢ ـ علاقة أو أكثر أولية تربط بين هذه العناصر. مثل علاقة البينية أو علاقة تساوى البعد فى الهندسة . وقد تكون العلاقة هى عملية جبرية .

٣ — بديهيات (مسلمات) تحدد خواص العلاقة وتؤخذ بدون برهان.

٤ — نتائج منطقية (نظريات) تشتق دون أى فروض تخص طبيعة العناصر المأخوذة.

ومن أنواع التركيبات الرياضية :

١ — التركيبات الجبرية . وفيها تكون العلاقة عبارة عن عملية مثل تركيب المجموعة أو الحقل.

٢ — تركيبات الترتيب وفيها تكون العلاقة هى علاقة ≥ تحقق البديهيات (الخواص) الآتية :

(أ) س   س

(ب) س ≥ ص ، ص ≥ س ⟸ س=ص

(جـ) س ≥ ص ، ص ≥ ع ⟸ س ≥ ع

٣ — التركيبات التوبولوجية وهنا تكون العلاقه هى التوبولوجى ت.

وقد تكون للفئة الواحدة أكثر من تركيب رياضي. وقد يكون التركيب الواحد موجود فى أكثر من نظرية مختلفة. فمثلا للفئة الواحدة ح للاعداد الحقيقية يوجد تركيبات مختلفة مثل تركيب المجموعة، الحقل، متجه الفراغ، تركيب الترتيب، تركيب التوبولوجى، ومن ناحية أخرى تركيب المجموعة موجود فى ح وموجود أيضا فى الأعداد الصحيحة مقياس هـ، وفى هندسة التحويلات.

وعموما فان بعض التركيبات الرياضية تكون لها دلالة أساسية لأنه يمكن أن نقابلها فى نظريات مختلفة ومثل هذه التركيبات تسمى تركيبات الأم mother structures وهى تتضمن التركيبات المرتبطة بما يأتى: علاقة التكافؤ، تركيبات الترتيب، التركيبات الجبرية، التركيبات التوبولوجية.

وبعض التركيبات الرياضية تكون أكثر تعقيدا لأنها تبين تركيبات متعددة مرتبطة مع بعضها بشروط من التوافق وتسمى هذه

التركيبات بالتركيبات المتعددة multiple structures فمثلا المجموعة التوبولوجية تتكون من فئة سہ لها نفس تركيب المجموعة (سہ، ٥) وتركيب التوبولوجي (سہ، ت) مرتبطة بنوع من التوافق لأن الدالتين د١ (س، ص) = س ٥ ص، د٢ (س) = س⁻¹ (أى معكوس س فى المجموعة) دالتين مستمرتين.

وللقارىء الذى لديه فكرة عن تركيب التوبولوجي وتركيب المجموعة نقدم المثالين الآتيين لتوضيح المجموعة التوبولوجية.

مثال ١ : فئة الأعداد الحقيقية ح مع عملية الجمع العادية +، ومزودة بالتوبولوجي العادى تكون مجموعة توبولوجية وذلك لأن: د١ (س، ص) = س + ص، د٢ (س) = − س دالتين مستمرتين.

مثال ٢ : سہ = {س، ص، ع} والعملية ٥ كما هى موضحة بالجداول والتوبولوجي.

ت = {φ، سہ، {ص}، {س}، {س، ص}} لا تكوّن مجموعة توبولوجية.

٥	س	ص	ع
س	س	ص	ع
ص	ص	ع	س
ع	ع	س	ص

إذ أن د٢ (س) = س، د٢ (ص) = ع، د٢ (ع) = ص وذلك يؤدى إلى أن الصورة العكسية د٢ للفئة المفتوحة {ص} تكون الفئة {ع} ولكن {ع} ليست فئة مفتوحة. وعلى ذلك فان د٢ ليست دالة مستمرة.

ويختص الجبر التوبولوجي والتوبولوجي الجبرى بالتركيبات المتعددة أما الهندسة التفاضلية والجبر التفاضلى فتختصان بتركيبات أوسع وأغنى. ويوجد فى قمة التركيبات الرياضية ما يسمى بتركيبات مفترق الطرق crossroad structures التى تتضمن تركيبات عديدة بينها نوع من التوافق. ومثال لذلك نظرية الجهد Potential Theory وأى تقدم فى دراسة التركيبات المكونة لتركيب مفترق الطرق لها عائد على

النظرية الكلية. فمثلا أى تقدم فى نظرية الجهد يناظره تقدم فى النظريات الأخرى كتكامل ليبيه، الفراغات التوبولوجية، متجهات الفراغ التوبولوجية، ... وغيرها.

ومثل هذه التركيبات هو الميدان الحقيقى لدراسة التحليل الرياضى الحديث ويمكننا أن نعرف التحليل الرياضى على أنه عائلة كل تركيبات مفترق الطرق، ومن أفرع التحليل الرياضى (المزدهرة) الحالية والتى تعطى فكرة عن موضوعات الرياضيات الحديثة (الرياضيات الأحدث أو الرياضيات المعاصرة):

1) Topological groups and lie's theory.
2) Topological algebra.
3) Measure and integraton.
4) Functions of several complex variables، analytic varieties (with fibre bundles, filtrated spaces).
5) Partial diffrential equations non. linear cases.
6) Pontential theory.
7) Harmonic analysis on general groups, functions of positive type.
8) Functional analysis (locally convex topological vector spaces, convexity, spectral theory of operators).
9) General topology.
10) Differential geometry.
11) Differential topology.
12) Probability theory.

مميزات الطريقة البديهية:

نقدم فيما يلى مميزات الطريقة البديهية التى تعتبر قلب الرياضيات الحديثة كما يراها شوكية أحد الرياضيين المعاصرين مع بعض التفسيرات.

(١) التوفير فى التفكير وفى الرموز، فحالما تثبت نظرية فى نظام بديهى يمكن تطبيقها فى حالات متعددة مختلفة فى محتواها، فمثلا أى نظرية تثبت فى نظرية المجموعات يمكن تطبيقها فى الطبيعة فى تركيب له تركيب المجموعة.

(٢) توحيد الرياضيات. أول الأنظمة البديهية (التركيبات) كانت مصنفة أو أحادية التكافؤ بمعنى أنه يوجد تشاكل بين نماذج النظام. مثال لذلك النظام البديهى للهندسة الاقليدية، اللاإقليدية، الاسقاطية لهيلبرت، والنظام البديهى للاعداد الطبيعية لبينو. ومن ناحية أخرى يوجد تركيبات متعددة التكافؤ بمعنى أن البديهيات الخاصة بها يمكن تطبيقها على فصول واسعة لفئات تحمل تركيبات ليس بينها تشاكل. وهذا التعدد التكافئى يعتبر ضمان للتكيف لحالات مختلفة وبذلك تتوحد الأفرع المختلفة للمادة وتذوب الفواصل بينها. وعلى ذلك يصعب فى بعض الأحيان أن نقول أن صيغة ما فى الجبر أو الهندسة أو التحليل الرياضى.. فمثلا نرى أن هندسة الفراغات الاقليدية ما هى إلا جبر خطى لمتجه فراغ ذى ثلاث أبعاد معرف عليه عملية الضرب القياسى وأن الصور التربيعية فى هذا الفراغ تكافىء دراسة القطع المخروطية المستوية. ومثال آخر، الفئات المحدبة ولو أنها تنتمى إلى الهندسة إلا أنها أصبحت وسيلة أساسية فى التحليل الرياضى فى دراسة متجهات الفراغ التوبولوجى.

وهذا التعدد التكافئى للتركيبات الكبيرة هو العامل الموحد الذى يسمح بالتوسع فى النظريات الرياضية المتبادلة، (وهذه الظاهرة ليست جديدة تماما فلدينا التمثيل الهندسى للأعداد المركبة وهندسة ديكارت) ومن الأمثلة الأخرى:

1) Zariskis topology in algebraic geomtery.
2) Topological interpretaton of the proof of important theorems in logic.
3) Leray's theory of bundles first studies in algebraic topology but now invading algebra and analysis.

(٣) العلاقة الديناميكية بين العناصر الرياضية. ينتج من التعدد التكافئى أن العناصر المنعزلة لا تدرس ولكن الذى يدرس عائلات من العناصر يوجد بينها علاقات متبادلة وبهذا لا تصبح النظريات أكثر تعميما فقط ولكن فى نفس الوقت كل عنصر يعرف أكثر بمفرده. وذلك لأن علاقته بالعناصر الأخرى تبين خواصه المختلفة. فالرياضيات الحديثة علاقية وهذه تعطيها ديناميكية داخلية نجدها معكوسة فى لغتها ورموزها الفريدة، مثل الرموز س ⟵ د(س)، أ ≼ أ، س ∪ ص، س × ص، π س$_{ى}$ ، س/ع، ...

والمبدأ الذى يقول أن الرياضيات علاقية يتفق مع المبدأ الذى يقول: «لكى نعرف مفهوما جيدا لابد أن ندرس كل صوره وما يخالفه». وكما يتفق مع المبدأ الموجود فى الأبحاث العلمية الذى يقول أنه لايمكن الوصول إلى جوهر العناصر وكل ما نستطيع الوصول إليه هو العلاقات بينها، فمثلا المهم فى شبكة التليفونات ليس نوع السلك أو شكله. ولكن دوائره الكهربية فهذه هى التى تحدد العلاقات بين النقط المختلفة فى الشبكة.

(٤) التكيف للعالم الطبيعى. التعدد التكافئى يضمن احتمال أكبر لتطبيق النظريات فى العالم الطبيعى.. فمثلا استخدام نظام هيلبرت (فراغ هيلبرت) فى تفسير نظرية الكم واستخدمت هندسة الفراغات الريمانية فى تكوين النظرية النسبية. والطبيعة النظرية الحديثة تنمو الآن عن طريق النظم البديهية. فبعض الحقائق الأساسية تؤخذ كبديهيات ومنها نستنتج نتائج تتحقق بالتجربة أى عن طريق التجريب.

(٥) التخلص من الصعوبات الميتافيزيقية. فمثلا تخلصت الأعداد المركبة من غموضها ولا معقوليتها عندما عرفت فئتها عن طريق ح^{2} معرف عليها +، × فالعدد المركب هو عنصر فى الحقل المركب ولا يعرف مستقلا عنه. فمثلا تخلصنا من الخطأ $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = \sqrt{-١ \times -١} = \sqrt{+١} = ١$

(٦) الحث على التوسع والنمو فى الرياضيات. فكما يقول جودل:

«فى أى تركيب رياضى (قائم على البديهيات) توجد أسئلة لا تجد جوابا إلا إذا توسع التركيب ليشمل مفاهيم وبديهيات جديدة.. ويمكن أن نتبين ذلك فى توسيع النظم العددية للأعداد الطبيعية ــ الصحيحة ــ القياسية ــ الحقيقية ــ المركبة ــ الرباعية ــ الزائدية.

ومن الرياضيين الذين أسهموا فى بناء الرياضيات الحديثة:

١ ــ جاوس Carl Friedrich Gauss (١٧٧٧ ــ ١٨٥٥) وهو ألمانى، وقد قدم الجديد فى ميادين مختلفة فى الرياضيات وتطبيقاتها فى الطبيعة والفلك. وتعمق فى هذه الميادين المختلفة، وهو الذى قدم الصلابة والتجريد فى البرهان فاستخدم لأول مرة برهان الوجود وبرهان الوحدانية. وأهتم اهتماما كبيرا بنظرية الأعداد ووضع الأساس المنطقى للأعداد المركبة، وقدم النظرية الأساسية فى الجبر التى تقول أن كل معادلة جبرية بمعاملات حقيقية لها على الأقل جذر واحد، ومن ثم لها ن من الجذور، واكتشف الهندسة اللا إقليدية، والدوال الناقصية، وتعامل مع تكامل أويلر، واستخدم التكامل المركب، وعموما فان جاوس يعد من أكبر الرياضيين.

٢ ــ ليجندر Adrian Marie Legendre (١٧٥٢ ــ ١٨٣٣) وهو فرنسى، وقد اشتغل بنظرية الأعداد، الدوال الناقصية وتكامل أويلر.

٣ ــ جالوا Evariste Galois (١٨١١ ــ ١٨٣٢) وهو فرنسى، وقد قام بدور كبير فى خلق نظرية المجموعات، حيث عبر عن الخواص الأساسية لمجموعة التحويلات الخاصة بجذور المعادلة الجبرية وبين أن هذه الخواص تحدد بالمجموعة وقد قدم جالوا أفكارا فى تكامل الدوال الجبرية ذات متغير واحد والتى تسمى الآن بتكامل آبل.

٤ ــ ريمان George Friedrich Riemann (١٨٢٦ ــ ١٨٦٦) وهو

أحد تلامذة جاوس. وهو يعد أكثر الرياضيين تأثيرا فى الرياضيات الحديثة. وهذا يتضح من أعماله فى نظرية الدوال ذات المتغير المركب وفى السطوح الريمانية. التى قدمت النواحي التوبولوجية فى التحليل وفى تطبيق أفكاره للدوال الهندسية الزائدية والدوال الآبليه. وأشتغل بالمتسلسلات المثلثية وأساسيات التحليل حيث قدم تعريف للتكامل الريمانى. وأشتغل بأصول الهندسة حيث قدم الفراغ على أنه طى توبولوجى topological mainfold بعدد ما من الأبعاد.

٥ — ڤيرستراس Karl Weirstrass (١٨١٥—١٨٩٧) وهو ألمانى، وأهم أعماله فى أساس نظرية الدوال ذات المتغير المركب على متسلسلات القوى. وقد اشتغل بالتكامل الناقص الزائدى، وبالدوال الآبلية، وبالمعادلات التفاضلية الجبرية. وقد اشتهر فيراستراس بصلابته فى البرهان التى أضحت ليس فقط فى نظريته للدوال ولكن أيضا فى حساب التغير.

٦ — كانتور George Cantor (١٨٤٥—١٩١٨) وهو ألمانى، وقد اشتهر بعمله فى نظرية الفئات (اللانهائية). وبهذه النظرية خلق كانتور ميدانا جديدا للبحث فى الرياضيات. وقد ظهرت أهمية نظرية كانتور عند تطبيقها فى أساس نظرية الدوال الحقيقية وفى التوبولوجى وفى نظرية القياس.

٧ — كيلى Arthur Cayley (١٨٢١—١٨٩٥) وهو انجليزى، وأهم أعماله فى المجموعات المحدودة، المنحنيات الجبرية، المحددات، اللامتغيرات للصور الجبرية.

٨ — هاملتون William Rowan Hamilton (١٨٠٥—١٨٦٥) وهو انجليزى (أيرلندى)، وهو الذى قدم الأعداد الرباعية وحسابها التى ظهرت أهميتها فى نظرية المتجهات، والأعداد الزائدية المركبة. وقد أشتغل هاملتون بتطبيقات الرياضيات فى الضوء وفى الديناميكا.



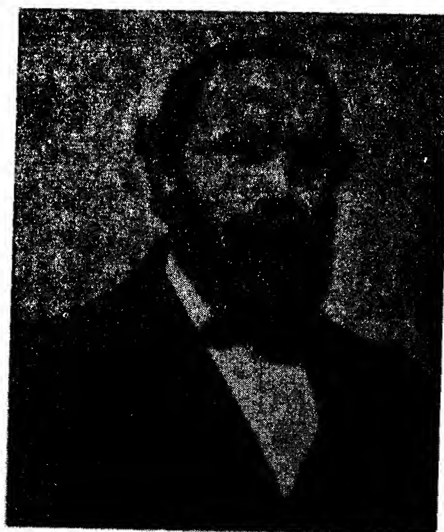
١ ــ جاوس (١٧٧٧ ــ ١٨٥٥)



٢ ــ ليجندر (١٧٥٢ ــ ١٨٣٣)



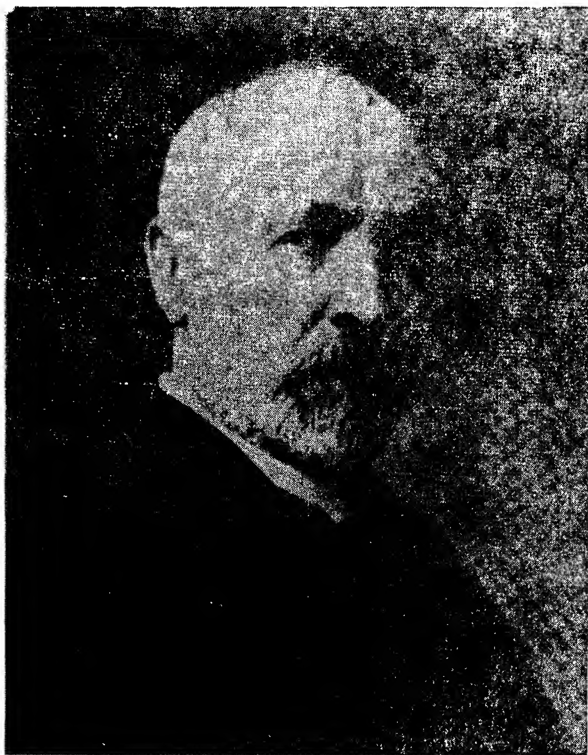
٣ ـ جالوا (١٨١١ ـ ١٨٣٢)



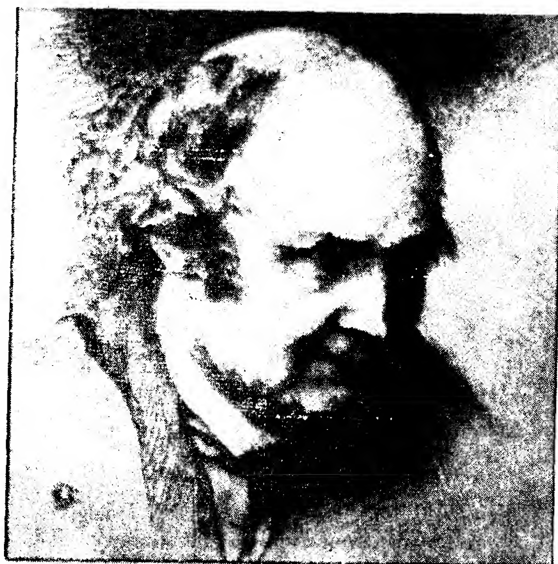
٤ ـ ريمان (١٨٢٦ ـ ١٨٦٦)



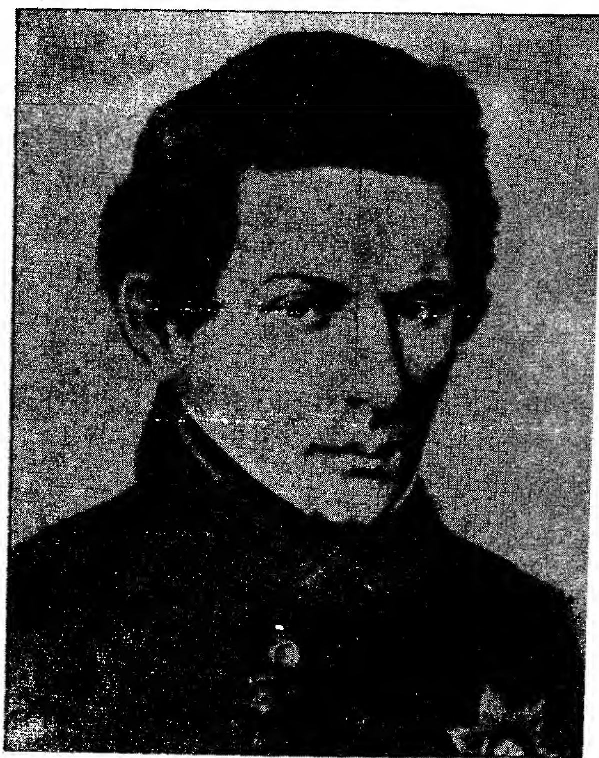
٥ ــ فيراستراس (١٨١٥ ــ ١٨٩٧)



٦ ــ كانتور (١٨٤٥ ــ ١٩١٨)



۷ — کیلی (۱۸۳۱ — ۱۸۹۵)



۸ — لوبتشفسکی (۱۷۹۳ — ۱۸۵۶)



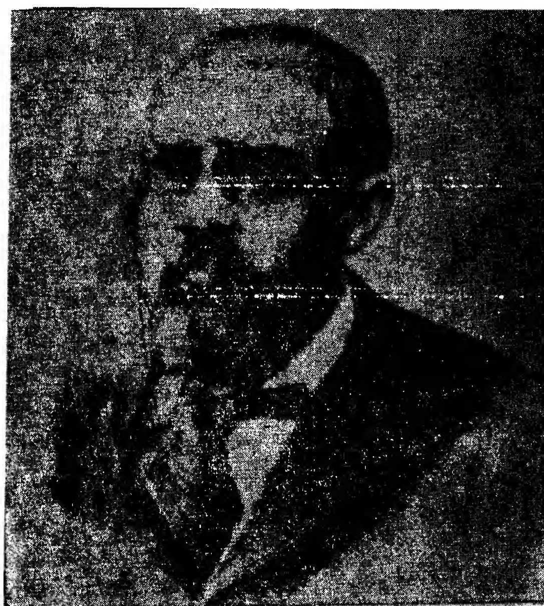
٩ ــ هاملتون (١٨٠٥ ــ ١٨٦٥)



١٠ ــ كلين (١٨٤٩ ــ ١٩٢٥)



١١ ــ لای (١٨٤٢ــ١٨٩٩)



١٢ ــ بوانكريه (١٨٥٤ ــ ١٩١٢)

٩ ـ لـوبـتـشـفـسـكـى Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky (١٧٩٣ـ١٨٥٦) وهو روسى، وقد أشتهر بهندسته اللاإقليدية التى تسمى بالهندسة الزائدية والتى اكتشفها مستقلا عن بولاى المنغارى.

١٠ ـ كلين Felix Klein (١٨٤٩ ـ ١٩٢٥) وهو ألمانى، وقد استخدم المجموعات فى تطبيق الهندسة. حيث ربط كل هندسة باللامتغيرات الخاصة بمجموعة التحويلات المرتبطة بها. ودراسة اللامتغيرات الجبرية والتفاضلية تعطى التركيب التحليلى للهندسة. واستخدم كلين أيضا المجموعات فى المعادلات التفاضلية الخطية، وفى الدوال الناقصيه المقياسيه elliptic modular function وفى الدوال الآبليه والدوال الأوتومورفيه وعموما فقد كان اهتمام كلين بالمجموعات غير المستمرة وتطبيقاتها.

١١ ـ لاى Marius Lie (١٨٤٢ـ١٨٩٩) وهو ألمانىّ، وقد كان اهتمامه بالمجموعات المستمرة (المجموعات التوبولوجية) وتطبيقاتها. فقد اشتغل بدراسة مجموعات التحويلات المستمرة واللامتغيرات الخاصة بها ودورها فى تصنيف الهندسة، الميكانيكا، المعادلات التفاضلية العادية والجزئية.

١٢ ـ بوانكريه Henri Poincare (١٨٥٤ـ١٩١٢) وهو فرنسى، وهو يعد من أعظم رياضى النصف الثانى من القرن التاسع عشر. وله أعماله الأصيلة فى الرياضيات وتطبيقاتها. ومعظم النظريات الحديثة للنسبية، وعالم الفضاء، والاحتمالات، والتوبولوجى تأثرت بأعمال بوانكريه. وهو الذى قدم البرهان بالاستنتاج الرياضى.



١٣ ـ هيلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣)

١٣ ـ هيلبرت david Hibert (١٨٦٢ـ١٩٤٣) وهو ألمانى، وقد

أشتهر بوضع أصول الهندسة على أساس بديهى وقد تأثرت الرياضيات الحديثة بطريقته البديهية وبالمشكلات التى وضعها. وقد تضمنت أعماله بعضا من المنطق الحديث والفيزياء (الطبيعة) الرياضية.

٣.٥.٢ ـ حتمية تدريس الرياضيات الحديثة فى المراحل المختلفة:

منذ أقدم العصور والتدريس يُكيف أو يعدل لملاحقة تطور المعرفة. ولكن هذا التكيف أو التعديل أصبح لوقت ما متأخرا نظرا للتقدم الهائل فى العلم. ولقد أصبح التقدم العلمى سريعا جدا فى الستين سنة الأخيرة حتى أن أى تأخر فى ملاحقة هذا التطور يجب تجنبه. ففى الرياضيات نجد أن الأبحاث زادت زيادة كبيرة حتى أصبح من الصعب أن يسير البحث والتجميع فى وقت واحد. ولكن مما سهل عملية التجميع فى الستين سنة الأخيرة هو اللجوء إلى استخدام نظرية الفئات والطريقة البديهية.

وعلى ذلك فالرياضيات الحديثة الناتجة من استخدام الطريقة البديهية ونظرية الفئات ثورة كبيرة تتطلب بالحاح تعديل وتطوير التدريس فى جميع المراحل: الابتدائية والاعدادية والثانوية والجامعة وذلك لما يأتى:

١ ـ إذا رجعنا إلى الهدف الأساسى من تدريس الرياضيات وهو «إعداد الفرد للحياة العامة بصرف النظر عن تطلعاته فى المستقبل من ناحية ومن ناحية أخرى المساهمة فى إعداد الفرد لمواصلة دراساته فى الرياضيات نفسها أو فى موضوعات أخرى أثناء وجوده فى المدرسة وبعد تخرجه منها»، ونجد أن الرياضيات الحديثة تساعد فى الاعداد السليم للفرد للحياة العامة سواء أكان الفرد سوف يكون من الرياضيين أو من المطبقين للرياضيات كالمهندسين مثلا أو لن يشتغل بالرياضيات ولا بتطبيقاتها كالفرد العادى، ويتضح ذلك مما يأتى:

(أ) بالنسبة لاعداد الرياضيين الذين ينموا ويتابعوا الرياضيات الحديثة لازمة لهم حتى تقرب بين ما يتعلمون وبين مجال أبحاثهم فيما

بعد. هذا من جهة ومن جهة أخرى فان معظم الرياضيات الحديثة جاءت نتيجة لوضع أساسيات المادة على أساس أكثر منطقه وتجريدا، فالتوضيح المنطقى للأسس المختلفة يسهل إستيعاب المادة. كما أن تدريس النظريات الموحدة يقرب بين المجالات المختلفة ويساعد مثل هؤلاء الأفراد على معالجة المشكلات المعقدة واستخدام الأفكار المبسطة.

(ب) بالنسبة لاعداد المطبقين للرياضيات أو الذين يستخدمون التكنولوجيا التى أساسها الرياضيات الحديثة. الرياضيات الحديثة لازمة بالنسبة لهم. فمن جهة أصبحت بعض الطرق الرياضية مفيدة ولا يمكن الاستغناء عنها فى الطبيعة والهندسة مثل: المصفوفات، محولات transforms لابلاس وفورير، المعادلات التفاضلية الجزئية، التوزيعات distributions، فراغات هيلبرت، المجموعات، ومن جهة أخرى: فالرياضيات الحديثة جاءت بطرق مبسطة مبتعدة عن التعقيد وبأفكار موفرة للجهد لكل المجالات يمكن أن يستفيد منها الفيزيائى أو المهندس أو من يشتغلون بالاقتصاد مثلهم كمثل الرياضى الذى يشتغل بالرياضيات.

(جـ) بالنسبة لاعداد الفرد العادى. الرياضيات الحديثة لازمة له.. فكما ذكرنا فهم المفاهيم الرياضية المختلفة يتطلب تكوين مفاهيم أولية أساسية وهذه المفاهيم الأولية كلها مفاهيم فى الرياضيات الحديثة. وقد بينت الأبحاث السيكلوجية (أبحاث بياجيه كما سنذكر فى الباب التالى) أن الرياضيات الحديثة أبسط وأقرب إلى ذهن التلميذ من الرياضيات التقليدية كما أنها لازمة وأساسية فى فهم المفاهيم الرياضية حتى التقليدية منها، بالإضافة إلى أن الرياضيات الحديثة القائمة على توضيح الأسس المختلفة تسهل استيعاب المادة للفرد العادى مثله مثل الفرد الذى سوف يشتغل بالرياضيات أو بتطبيقاتها، وقد اتضح من تجريب الرياضيات الحديثة فى البرامج المختلفة أن دراستها تكسب التلميذ مرونة فى التفكير لا تعادلها فى ذلك مادة أخرى، ولقلة الرموز المستخدمة فان الفرد العادى يمكن أن يتعلم الفئات وعلاقتها بالمنطق ويجد فى ذلك متعة وفائدة، وبساطة

التركيبات الرياضية المتعددة لتكافؤ يجعلها قابلة للتطبيق فى مجالات مختلفة فى الحياة.

ومن ثم يجب أن نكيف تبعا لمستويات المراحل المختلفة لغة وطرق ومفاهيم الرياضيات الحديثة، ومن المبادىء التى يستحسن مراعاتها فى وضع برامج جديدة فى المراحل المدرسية.

١ — أن يتعود التلميذ على الفئات، ولغتها، والعمليات الخاصة بها وتطبيقاتها مبكرا كلما أمكن. وقد بينت التجارب (تجارب بياجيه مثلا) أن ذلك يعد أساسيا لفهم مفاهيم العدد والقياس، والهندسة كما أن التلميذ يسعد بذلك.

٢ — أن يدرس مع الفئات بعد ذلك المنطق. وقد تبين أهمية المنطق فى فهم الموضوعات المختلفة. مثل التحليل الرياضى (التفاضل والتكامل). فقد اتضح أن فهم أساسياته لطالب سن ١٩ سنة يرجع إلى أنه غير متعود على طرق البرهنة ونفى التقارير.

٣ — أن يقدم مبكرا كلما أمكن مفهوم الدالة (الراسم) ورموزها فى الوقت الذى يمكن أخذ أمثلة من الحياة، ومن الجبر، ومن الهندسة، ومن الطبيعة. ثم يقدم تحصيل الرواسم، التحويلات، مجموعة التحويلات. وبعد ذلك تقدم تركيبات التكافؤ، تركيبات الترتيبات، والتركيبات الجبرية، التركيبات التوبولوجية ويمكن أن تدرس مثل هذه التركيبات على مستويات مختلفة تبدأ من سن الثانية عشرة. فتكون عن طريق المحسوسات فى سن مبكرة وبالطرق المجردة فى سن متقدمة «ويمكن فى المرحلة الثانوية تقديم الهندسة الابتدائية ــ الهندسة الآفينية للمستوى والفراغ، وجبر المتجهات، ثم تقدم بعد ذلك عملية حاصل الضرب القياسى لتقليل الحسابات فى الهندسة القياسية العادية.

٤ — أن توضح الأسس الجبرية والهندسية وتفاعلهما فى خدمة بعضهما. فأساس تدريس التحليل الرياضى يقوم على جبر الفئات، حقل الأعداد الحقيقية ح، الجبر الخطى، المجموعات، والتوبولوجى. وهذه الأسس الجبرية نحتاج إليها فى دراسة الهندسة والتى نعنى بها

فى المراحل الثانوية فى البرامج الحديثة دراسة متجه الفراغ فى بعدين أو فى ثلاثة أبعاد مع عملية الضرب القياسى.

أى نهتم بتدريس التركيبات الرياضية لأنه لم يعد من الممكن تقسيم تدريس الرياضيات إلى أفرعها التقليدية: الجبر، الهندسة، التحليل الرياضى. فالجبر والهندسة تساعد بعضها البعض، الجبر برموزه وعملياته والهندسة بلغتها وحدسها. فالهندسة مثلا تقدم للتحليل الرياضى عن طريق إطارها التوبولوجى الوسائل (كوسيلة مفهوم الفئة المحدبة) والتفسيرات للتحليل الرياضى بينما يقدم التحليل الرياضى للجبر فئات غنية من المجموعات ومتجهات الفراغ.

٤.٥.٢ ـ الطريقة البديهية فى البرامج المدرسية (المطورة):

ولو أن الرياضيات الحديثة الناتجة من استخدام الطريقة البديهية (والفئات) أحدثت تطورا ونموا هائلا فى الرياضيات (وتطبيقاتها)، إلا أن تطور مقررات الرياضيات وتدريسها فى المراحل المختلفة لم يكن نتيجة لهذا النمو فى الرياضيات نفسها. فقد كانت الدوافع فى بادىء الأمر وراء تحديث مناهج الرياضيات ناشئة فى معظم الأحوال من مقتضيات العصر التكنولوجى، وعصر العقل الالكترونى ووصول الانسان إلى القمر. فالملموس ليس هو تطور الرياضيات بقدر ما هو التطور فى التطبيقات الحيوية الناتجة من استخدام وسائلها.

وحدث تطوير وتغيير فى الرياضيات المدرسية (منذ الخمسينيات)، فوضعت مناهج جديدة تتمشى مع العالم المتغير وتلائم حياة الفرد وحاجات المجتمع. فشملت المقررات الجديدة فى معظمها موضوعات أساسية فى الرياضيات الحديثة وموضوعات تقليدية عولجت على أساس سليم بطريقة حديثة. وبالرغم من وجود العديد من البرامج المدرسية الحديثة للرياضيات، إلا أنه يوجد عناصر (أو موضوعات) مشتركة بينها فى الرياضيات الحديثة. ومن أهم هذه العناصر المشتركة الطريقة البديهية الممثلة فى التركيبات الرياضية (المميزة للرياضيات الحديثة)، وأبرزها النظم العددية، والمجموعة (أو الزمرة)، ومتجه الفراغ فى

معظم البرامج والنظم الهندسية فى بعضها . إلا أنه يوجد عيوب فى تدريس الطريقة البديهية، نقدم فكرة سريعة عنها ثم نقدم بعض المقترحات لتحسين تدريسها .

١ ــ عيوب تدريس الطريقة البديهية فى البرامج المدرسية المطورة :

نناقش فيما يلى وضع الطريقة البديهية فى البرامج المطورة متمثلة فى التركيبات الرياضية : المجموعة (الزمرة) ــ النظم الهندسية ــ النظم العددية .

(أ) أولا ــ بالنسبة إلى تدريس المجموعات : تقديم المجموعات فى المراحل المبكرة يعتمد على استخدام نماذج مبسطة ملموسة، تحمل ملامح مصطنعة تخرب وتشوه الأفكار الرياضية وغير أمينة عليها . فهذه النماذج لا تمثل بدقة التركيب الرياضى.. أما تقديم المجموعات فى المراحل المتقدمة لا يعكس روح تركيب المجموعة بأمانة و يستخدم أيضا وسائل ونماذج لا تؤدى إلى تعميم سليم أو تكوين معلومات أو إثبات نظرية بطريقة رياضية سليمة . فمثلا أستخدام جداول وأشكال المجموعات يمكن أن تكون وسائل توضيحية ولكنها غير سليمة لتقديم المجموعة أو لاثبات أن النظام ما هو مجموعة أو للوصول إلى تعميم . بالاضافة إلى أن تقديم المجموعات لا يتيح للتلميذ أن يجرد بنفسه مفهوم المجموعة وبديهياتها من أحوال ومجالات رياضية مختلفة (وهى تسمى مرحلة تكوين البديهيات)، ولا أن يشتق بنفسه نظريات (وهى تسمى مرحلة الاستنتاج) ولا أن يعرف تطبيقاتها (وهى تسمى مرحلة التطبيق) . أى لا تتضح معنى الطريقة البديهية ودلالتها من خلال مراحلها : التجريد وتكوين البديهيات، والاستنتاج، والتطبيق .

(ب) ثانيا ــ بالنسبة للطريقة البديهية المتمثلة فى النظم الهندسية : تختلف البرامج الحديثة فيما بينها فى اختيار المادة الهندسية وطريقة معالجتها، إلا أن معظم هذه البرامج لا تقدم الهندسة كمادة مستقلة (كما فى البرامج التقليدية) ولكنها ١) تستخدم الطرق الهندسية وتستغلها فى نمو المفاهيم الرياضية كهندسة التحويلات فى نمو

مفاهيم المجموعة. ، ٢) تستخدم الوسائل والنماذج والتمثيلات الهندسية فى دراسة الموضوعات الأخرى ، ٣) تستعين بالمتجهات والهندسة التحليلية فى دراسة الهندسة. أما القلة من البرامج الحديثة فتقدم بعض النظم الهندسية كأنظمة مبنية على أساس الطريقة البديهية .. مثل تقديم بعض أنظمة لهندسة هيلبرت أو لهندسات آفينية أو اسقاطية بطرق رسمية مجردة. إلا أنها لم تؤدى إلى إعطاء بصيرة للطريقة البديهية أو لتقديرها. فلم يستسيغها مثلا الطلبة ولا المدرسين عندنا (حتى ألغيت). وقد يرجع ذلك إلى أن تقديم النظم الهندسية يقوم على بعض اصطلاحات غير مألوفة ، فقد يكون من الغريب على التلميذ أن النقطة أو المستقيم من الاصطلاحات غير المعرفة ومن الصعب عليه أن يفهم بديهيات نظام هيلبرت وخاصة دور بديهية الاستمرار (حتى فى الجامعة). كما أن تقديمها لا يعطى معنى متكامل للطريقة البديهية (ومراحلها : التجريد وتكوين البديهيات ــ الاستنتاج ــ التطبيق). فمثلا لا تؤدى أن يعرف التلميذ فى المراحل الأعلى دلالة الهندسة الابتدائية فى تكوين أو اكتشاف بديهيات هيلبرت ، ولا أن يعرف دلالتها التطبيقية فى بناء التركيبات المجردة كالفراغ القياسى metrie space أو متجه الفراغ المعيارى normed space أو فراغ هيلبرت Hlbert space

(جـ) ثالثا ــ بالنسبة للطريقة البديهية الممثلة للنظم العددية : ولو أن النظم العددية تعد أبسط التركيبات الرياضية وأقلها تجريدا ، إلا أن تقديمها فى البرامج المدرسية المطورة لا يعطى أيضا معنى متكاملا للطريقة البديهية. فهى تقدم فى بعض البرامج لتمهد للتركيبات الجبرية المجردة مثل المجموعة ولكن بطريقة سريعة قد تؤدى إلى تجريد متسرع لمفهوم المجموعة (قبل أن يقابل التلميذ أمثلة لحالات غير إبدالية مثلا). كما أن محاولة تقديمها للمراحل المتقذمة بطريقة مجردة عن طريق تكوين النظم العددية على أساس نظرية بينو Peano والتصنيف على أساس علاقة التكافؤ تكون عملية طويلة مملة تتطلب مستوى عالى من التجريد غير مستساغة للتلميذ. وعموما فتقديمها للتلميذ فى المراحل المبكرة أو

المتقدمة لاتعطى أيضا معنى للطريقة البديهية (ومراحلها: التجريد ــ الاستنتاج ــ التطبيق).

٢ ــ مقترحات بشأن تدريس الطريقة البديهية:

(أ) عند تقديم الطريقة البديهية فى المراحل المبكرة يجب أن نبدأ بتركيبات بسيطة توضح التماثل والانتظام فى الرياضيات والعالم الطبيعى، وتؤجل التركيبات المجردة كالمجموعة فيما بعد.

(ب) يجب توضيح معنى الطريقة البديهية ومراحلها (التجريد ــ الاستنتاج ــ التطبيق) فى مجالات مختلفة للرياضيات. فمثلا فى المراحل المبكرة (أو المتقدمة) يمكن تقديم النظام البديهى للاحتمالات عن طريق اشراك التلميذ فى التوصل إلى البديهيات من أحوال مختلفة. فمن أمثلة متعددة يطلب من التلميذ تعيين احتمالات فضاء العينه واحتمالات حدثين متنافيين وأحتمال حدث مستحيل، هذه الخواص تستنتج من حالات خاصة ثم تجرد وتعرف على أى فئة فتكون بديهيات الاحتمال: ل(ف)=١، ص ⩽ ل(أ) ⩽ ١ لكل أ ⊂ ف، ل(أ ∪ ب)=ل(أ)+ل(ب) بشرط أن يكون أ ∩ ب = ∅ ثم نتيح الفرصة للتلميذ ليثبت نظريات على أساس هذه البديهيات مثل: ل(أَ)+ل(أ)=١ ويطبقها فى حل تمارين أو الوصول إلى نتائج أو نظريات أخرى أو مفاهيم أخرى فى التركيب أو خارجه. وبالمثل يمكن مساعدة التلميذ أن يصل إلى بديهيات تركيب المجموعة عن طريق تجريد خواص العمليات الثنائية الملموسة (+، −، ×، ÷، الرفع إلى أس، التحصيل، ...) على فئات ملموسة من الأعداد أو المتجهات أو التحويلات.. ثم تعريفها على فئة مجردة عناصرها ليست بالضرورة أعداد فيجرد التلميذ بنفسه بديهيات المجموعة ثم نتيح له فرصة استنتاج نظريات مثل وحدانية العنصر المحايد وتطبيقها فى حل المعادلات، أو نظرية على رتبة المجموعة الجزئية التى يمكن تطبيقها فى تصنيف ا لتماثلات. كذلك يمكن أن يصل التلميذ إلى بديهيات المجال الصحيح عن طريق استنتاج نظريات المضاعف

المشترك الأدنى والعامل المشترك الأعلى وتطبيقاتها فى الجبر. وبالمثل فى التوبولوجى، من الفترة المفتوحة على $ح^{1}$ وما يناظرها قرص مفتوح فى $ح^{2}$ وكرة مفتوحة فى $ح^{3}$ يصل التلميذ (فى المراحل المتقدمة) إلى مفهوم الكرة المفتوحة العام فى $ح^{ن}$ وبتجريدها يصل إلى مفهوم الفئة المفتوحة وخواصها بالاستعانة بالرسوم والتوضيحات بالأشكال الهندسية فى الأبعاد المختلفة. ثم تجرد الفئات المفتوحة وخواصها بحيث لا تعتمد على القياس أى نحررها من الأعداد الحقيقية والأشكال الهندسية، وتعريفها على فئة من النقط ليست بالضرورة نقطا هندسية يصل التلميذ إلى بديهيات الفراغ التوبولوجى. ثم تستنتج خواص المفاهيم الأساسية (كالجوار، والانغلاق، الفراغ الجزئى والاستمرار، ...) كنظريات وتطبيقات.

وعموما يجب أن تعطى خبرة خلفية كافية حتى تفهم مرحلة التجريد وتكوين البديهيات، كما أنه من الضرورى اعطاء تدريبا كافيا فى التفكير الاستنتاجى لتكوين مرحلة الاستنتاج، كذلك يجب اعطاء معلومات واقعية ملموسة للنظرية لتكوين مرحلة التطبيق.

(جـ) أن نشجع بصفة عامة التفكير الذى يحبذ التركيب والطريقة البديهية عن طريق تنظيم كل موضوع كوحدة تركيب structure unit. فمثلا عند تكوين وحدة توضح الاصطلاحات غير المعرفة والمعرفة والبديهيات والنظريات وتطبيقاتها فى حل تمرينات الوحدة أو وحدات أخرى.

فمثلا بالنسبة لوحدة عن المساحة قد تكون:

الاصطلاحات غير المعرفة: النقطة ــ الطول ــ القطعة المستقيمة ...

العلاقة : المساحة.

التعريفات : (١) المنطقة المضلعة.

(٢) مساحة أى منطقة مضلعة عدد حقيقى موجب.

(٣) وحدة المساحات هى مساحة مربع طول ضلعه الوحدة.

البديهيات : (١) إذا تطابق مضلعان تساوت مساحة المنطقة المضلعة لكل منها.

(٢) إذا كان تقاطع منطقتين مضلعتين لا تحتوى أى من نقطها الداخلية فان مساحة اتحاد المنطقتين تكون مجموع مساحتيهما.

(٣) مساحة المستطيل هى حاصل ضرب طولين متجاورين.

النظريات : (١) مساحة متوازى الأضلاع هى حاصل ضرب طول قاعدته فى طول ارتفاعه المناظر.

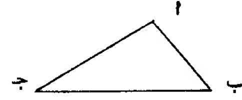
(٢) مساحة المثلث هى — حاصل ضرب طول أى ضلع وطول العمود على الضلع.

تطبيقات : ايجاد المساحة الجانبية لهرم معين بأبعاد معينة.

ايجاد مساحة شكل نجمى معين ...

(د) يستحسن عند تقديم بعض التركيبات (المصنفة أحادية التكافؤ) كالنظم الهندسية أو نظرية بينو التى يستلزم تقديمها بعض الاصطلاحات غير المألوفة والاجراءات الرياضية المجردة الطويلة أن نبدأ بما هو مألوف للتلميذ وبتفكير رجعى إلى الوراء نرجع إلى الأساس ونبحث عن البديهيات. وتسمى هذه الطريقة بالنمو التاريخى للنظام البديهى (التى اقترحها العالم الرياضى اليابانى المعاصر شيباتا Shibata). فمثلا فى الهندسة الابتدائية (الخاصية ١) فى شكل (٧) يمكن أن يصل إليها التلميذ فى مرحلة مبكرة عن طريق قص قطعة مثلثة ومن الخاصية (١) يصل إلى حل التمرين (٢). وفى مرحلة أعلى بعد معرفة بالمستقيمات المتوازية يستطيع التلميذ أن يثبت الخاصية (١) برسم مستقيم يوازى ب حـ ويمر بالنقطة أ. وبفحص البرهان نجد أنه يعتمد على الخاصيتين (٣)،(٤). كل من هاتين الخاصيتين عكس الأخرى. والخاصية (٤) ما هى إلا بديهية التوازى المعروفة. وفى مرحلة أعلى يمكن إثبات الخاصية (٣) من الخاصيتين (٥)،(٦). الخاصية (٥) هى احدى بديهيات الحدوث. والخاصية (٦) هى احدى بديهيات التطابق.. أى أننا نبدأ بخاصية مألوفة وبالرجوع إلى الوراء خطوة خطوة نصل إلى القاعدة الأساسية ونحدد البديهيات.

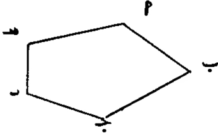
(١) مجموع زوايا المثلث الداخلة ١٨٠°



∢ أ + ∢ ب + ∢ جـ = ١٨٠°

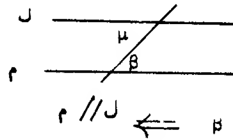
(المقصود بالزاوية ∢ مقياسها)

(٢) مجموع الزوايا الداخلة للمضلع ؟



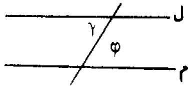
∢ أ + ∢ ب + ∢ جـ + ∢ د + ∢ هـ = ؟

(٣) وجود مستقيمات متوازية الذا تطابقت زاويتان متبادلتان حادثتان من تقاطع مستقيم بمستقيمين ، فإن المستقيمين يكونان متوازيين



ل // م ⇐ ... = ...

(٤) وحدانية المستقيمات المتوازية الزاويتان المتبادلتان الحادثتان من تقاطع مستقيم بمستقيمين متوازيين يكونان متطابقين

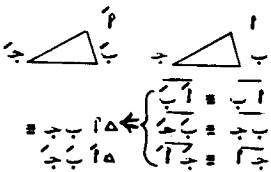


ل // م ⇐ ... ≡ ...

(٥) وحدانية المستقيم المار بنقطتين



(٦) تطابق المثلثين



أ ب = أَ بَ
ب جـ = بَ جَ ⇐ ∆ أ ب جـ ≡ ∆ أَ بَ جَ
جـ أ = جَ أَ

بديهية الحدوث (شكل ٣) بديهية التطابق

الباب الثالث

٣ ـ تعلم الرياضيات ـ أبحاث بياجيه فى نمو المفاهيم الرياضية :

لعل من أكثر الأبحاث أهمية فى تعلم الرياضيات هو ما قام به العالم السويدى جين بياجيه Piaget ، فقد قام بياجيه بسلسلة من التجارب لدراسة نمو المفاهيم الرياضية المختلفة عند الطفل منذ ولادته حتى سن المراهقة فى سبيل دراسته لنمو التفكير لدى الطفل بصفة عامة ، وقد ظهرت أهمية دراسات بياجيه التى قام بها هو ومدرسته منذ أكثر من ستين عاما لدرجة أن أبحاثه وتجاربه ترجمت إلى لغات عديدة ومازالت محل بحث ونقد فى معظم أرجاء العالم الغربى ، هذا وقد اتخذ القائمون على تدريس الرياضيات من أبحاث بياجيه أساسا لتطوير طرق التدريس وتعديل مناهج الرياضيات والتوصل إلى أساليب حديثة فى تعلم الرياضيات .

فقد بينت أبحاث بياجيه أهمية مراحل نمو التفكير وخصائصها فى كل مرحلة ووضح عمله أن الحوافز أو طرق اكساب المهارات أقل أهمية فى استيعاب وفهم ونمو بعض المفاهيم الرياضية من مراحل التعلم والنمو التى تتميز كل منها بنمط معين من التفكير، كما أن تكوين المفهوم الرياضى يتطلب وقتا أكثر من المتفق عليه عامة . ويتطلب أيضا إلماما ببعض المفاهيم الأولية كأساس له وكل هذه المفاهيم الأولية هى مفاهيم أساسية فى الرياضيات الحديثة .

ونتيجة لذلك لم يعد الاهتمام فى تدريس الرياضيات قاصرا على اكساب المهارات أو دراسة الحوافز الدراسية بل أصبح الاهتمام موجها إلى دراسة ما الذى يمكن أن ندرسه ومتى وكيف ندرس المفاهيم الرياضية بالصورة التى تناسب التلاميذ فى مراحل نموهم المختلفة ، وقد يستطيع المدرس خلال خبرته أن يعرف عما إذا كان تلميذه قد ألم ببعض المعلومات الرياضية أو فى استطاعته القيام ببعض العمليات

الحسابية بدقة ولكن ذلك لايدل بالمرة على أن التلميذ قد استوعب وفهم فهما عميقا المفاهيم والأساسيات الموجودة وراء العمليات المختلفة. فما يكون واضحا فى ذهن المدرس قد لايكون له أى دلالة بالنسبة لعقلية التلميذ. وهنا يجب أن نأخذ فى الحسبان مستوى النمو العقلى ونوع التفكير فى مرحلة النمو التى يمر بها التلميذ وإلا تعقدت العملية التربوية فى غير صالح التلميذ. فاذا تعلم التلميذ أن يعى ما هو مفهوم العدد قد يدفعه ذلك إلى الجمود الذى يتعارض مع فهم الأسس الأولية للرياضيات التى سيقابلها فيما بعد أما إذا قدمنا العمليات الحسابية لتلميذ لم يصل نموه بعد إلى درجة تقبلها بالصورة المعطاة فان التلميذ سيجد نفسه أمام بعض الرموز الغامضة التى قد تولد له الخوف من المادة والكراهية لها.

وفيما يلى سنلقى بعض الضوء على مراحل وعملية النمو لبياجيه مع التعرض لنمو المفاهيم المختلفة ومناقشة الاستفادة من تطبيقاتها فى التدريس، وهذه المفاهيم هى:

(أ) مفاهيم العدد.
(ب) مفاهيم الفراغ
(جـ) مفاهيم القياس.
(د) مفاهيم المنطق.

وسنعطى فكرة عن نتائج أبحاث بياجيه فيما يخص تطوير المناهج وتدريس الرياضيات ثم نقدم أمثلة لتدريس بعض الموضوعات فى الرياضيات على مستوى المرحلة الاعدادية بما يتمشى مع أبحاث بياجيه ونتائجها.

١.٣ ــ مراحل وعملية النمو لبياجيه:

يفسر بياجيه النمو العقلى على أساس عمليتين هما التمثيل (الاستيعاب) assimilation والتكيف (الملائمة) accomodation ويقوم الطفل بواسطة العملية الأولى باستيعاب وامتصاص العالم المحيط به ليكون نموذجا فى ذهنه لهذا العالم. أما العملية الثانية فيتم تعديل

وتكييف هذا النموذج طبقا للخبرات الجديدة، فمثلا عن طريق الاستيعاب يرسم الطفل فى ذهنه صورة لعملية الجمع + وبعد ذلك عن طريق التكييف يعدل فيها عندما يعرف خواص العملية الادماجية والابدالية على الأعداد الحقيقية مثلا. وقد قسم بياجيه على أساس تجاربه العديدة مراحل النمو إلى أربع مراحل (وكل مرحلة إلى أجزاء فى بعض الأحيان) وهى:

المرحلة الأولى ــ مرحلة الاحساس والحركة:

إلى ١ ½ سنة. يقوم الطفل منذ ولادته (وقبل تعلمه اللغة) برسم صورة (نموذج) للعالم الخارجى عن طريق حواسه وتحركاته المختلفة، فخلال لعب الطفل واكتشافه لما حوله يكون صورة ثابتة من الأشكال المختلفة والعلاقات بينها يتعرف على أساسها على مثل هذه الأشكال، ويتخذ الشكل شكلا ثابتا عن طريق توافق حركات الطفل التى تكون فى شأنها مجموعة إزاحات (تشمل تحركات معكوسة ومنسقة ومحايدة).

المرحلة الثانية ــ مرحلة ما قبل التفكير بالعمليات:

من ١ ½ إلى ٧ سنوات. من سنة ونصف إلى سنتين تبدأ اللغة فى الظهور وتترجم على أساسها الحركات والأحاسيس المختلفة إلى أفكار ورموز ويوسع الطفل النموذج الذى بناه عن العالم الخارجى عن طريق لعبه وخياله واكتشافاته واستفساراته ومشاركته فى الكلام. إلا أن تفكيره فى هذه المرحلة يكون سطحى ومرتبط بالمظاهر الادراكية (ما يحسه ويراه) ولايمكن للطفل فى هذه المرحلة أن يفكر فى مفهومين معا ولا أن يقوم بالعمليات المعكوسة (أى يرجع إلى الوضع الأصلى).

المرحلة الثالثة ــ مرحلة العمليات الملموسة (الغير مجردة):

من ٧ــ ١١ سنة. يستطيع الطفل فى هذه المرحلة أن يربط بين المفاهيم المختلفة بعلاقات إما رياضية أو منطقية وأن يفكر تفكيرا منطقيا (غير مجرد) فى أشياء ملموسة أو محسوسة (أشياء حقيقية) ويمكن تفسير الأشياء الملموسة على أساس خبرة الفرد السابقة ومستوى

نضجه فقد لا يكون ٢+٣ ملموسا بالنسبة لتلميذ الحضانة ولكن يكون ملموسا لتلميذ فى المرحلة الابتدائية حيث لا يكون س+ص ملموسا له فى حين يكون ملموسا لتلميذ المرحلة الاعدادية والثانوية. ومن أمثلة العمليات الملموسة فى هذه المرحلة عمليات التصنيف وعمليات الترتيب وعمليات منطق الفئات والعلاقات والعمليات الخاصة بالفراغ والأعداد.

المرحلة الرابعة ــ مرحلة العمليات المجردة:

من ١١ إلى ١٤ــ١٥ سنة. يبلغ الطفل فى هذه المرحلة أقصى مراحل النمو فى التفكير على أساس العمليات الموجودة التى تبلغ ذروتها فى سن ١٤ــ١٥ سنة ويكون تفكير الطفل (البالغ) فيها على أساس تركيبى منطقى قائم على وضع الفروض والاستنتاج الاستدلالى.

٢.٣ ــ نمو مفاهيم العدد:

بين بياجيه بتجاربه أن الطفل لا يعرف ما هو مفهوم العدد قبل أن يتعامل بطريقة عملية وحسية بعلاقات الترتيب، الحيز أو الكم، الفئات المتكافئة، التناظر الأحادى. وأحد التجارب الشيقة الخاصة بالأعداد تتلخص فى وضع فناجين بيض فى صف ويطلب من الطفل أخذ عدد من البيض من سلة مثل عدد الفناجين. وقد وجد أن الطفل فى المرحلة الثانية (خاصة ٤ــ٥ سنوات) يأخذ عدد من البيض ويضعه فى صف له نفس طول صف الفناجين دون إعتبار عدد البيض. ويكون حكم الطفل فى هذا السن مرتبطا بما يراه وقائما على المقارنة بالحيز أو بالطول، أما الحكم على تساوى العدد أو الفئات المتكافئة فلم يستخدم كما أن التناظر الأحادى لم يتكون بعد فى ذهنه. وفى سن (٥ــ٦ سنوات) فقد يبدو أن التناظر الأحادى تكون فى ذهن الطفل ولكن يكون مرتبطا بالظواهر الحسية فمثلا عند وضع البيض بشكل غير منظم لا يستطيع أن يحكم الطفل فى هذه السن على أن عدد البيض هو نفس عدد الفناجين (وقد حدث ذلك حتى بالنسبة للأطفال الذين يعرفون العد). ومفهوم التناظر الأحادى لا ينمو كاملا إلا عندما يرى الطفل أن عملية تغيير وضع البيض لا يعبر على التناظر

الأحادى أى يحفظ مفهوم التناظر الأحادى والعملية المعكوسة (الرجوع إلى الوضع الأصلى) ويكون هذا فى حوالى من ($٥\frac{١}{٢}$ — $٦\frac{١}{٢}$ ، ٧ سنوات).

وقد أجرى بياجيه تجارب عديدة وشيقة ليدرس بها نمو الأفكار الخاصة بالترتيب، التناظر الأحادى والتضمين الفئوى وتوضح جميعها أن الطفل يمر بالمراحل الأربعة التى ذكرناها.

وفيما يلى بعض النقط التى يمكن استخلاصها من دراسة نمو مفاهيم العدد والتى يمكن الاستفادة منها فى التدريس:

١ — يوضح عمل بياجيه أن نمو المفاهيم الأساسية للعدد لا تُساعد عن طريق التمرين أو التدريب اللغوى بل بالعكس هذا قد يؤدى إكسابه مهارة ولكن فهم وتكوين تركيب المفهوم فى عقل (ذهن) التلميذ لابد أن يأتى أولا.

٢ — يتعلم الطفل حل المسائل (المشكلات) عن طريق إدراكه الحسي ثم على عمليات على أشياء غير مجردة قبل أن يحلها بطريقة مجردة.

٣ — ليس تعلم معنى العدد بالسهولة أو بالسرعة التى يظنها معظم الناس، فالطفل العادى لا يستطيع فهم معنى العدد قبل السادسة والنصف أو السابعة.

٤ — لا يستطيع الطفل أن يصل إلى الفهم الكامل لمفهوم العدد قبل أن يتحرر من خواص وعلاقات الادراك الحسى وعلى هذا فان الطرق التى تساعد على تحرير الطفل من هذه الأشياء هى التى تساعد على سرعة التعلم وليست الطرق التى تركز عليها.

٥ — لابد أن يفهم الطفل العمليات المختلفة على الخواص الكاردينالية والترتيبية قبل أن يفهم الطفل ما هو العدد.

٦ — تتوقف القدرة على القيام بمثل هذه العمليات على ما يحيط بالطفل وما يقوم به من تجارب واستكشافات لما حوله.

٧ — لا يحق على أساس تجارب بياجيه تقديم أى قوانين أو قواعد

مجردة لطفل لم يصل نموه العقلى إلى ما قبل مرحلة العمليات الملموسة لأن قدرة الطفل حينذاك لاتساعده على فهم هذه القواعد حتى إذا استخلصت من أشياء ملموسة.

٨ ــ إذا كان فهم الطفل لطبيعة العدد يستحسن أن يكون ناتجا من لعبه واكتشافاته فان ذلك يجب أن يتبع بعد ذلك فى اكتشاف الطفل لخصائص النظم العددية والعلاقات بينها. أى يكون ذلك عن طريق اكتشافاته للأنماط المختلفة، لعبه بالأعداد، تكوينه لبعض النظم... وهكذا.

٣.٣ ــ نمو مفاهيم الفراغ:

كما وضح بياجيه أن مفهوم العدد هو مفهوم مركب مبنى على مفاهيم أولية بسيطة خاصة بالترتيب، الفئة، التناظر الأحادى.. فقد بين أيضا بتجاربه أن المفاهيم الأساسية للهندسة الاقليدية والتى ندرسها منذ أجيال طويلة هى مفاهيم مركبة يصعب على التلميذ استيعابها قبل التمهيد له بمفاهيم أبسط فى التوبولوجى مثل السطح المقفول، الجوار، الداخل، الخارج.. هذا وقد ظهر أيضا من تجارب بياجيه أن خصائص الهندسة الاسقاطية (المستوية، المجسمة) يسهل على الطالب استيعابها قبل استيعاب علاقات الهندسة الاقليدية المستوية.

ومن تجارب بياجيه الشيقة فى نمو مفهوم الخط المستقيم الذى يعتبر عنصرا أساسيا فى الهندسة الاسقاطية تجربة استخدمت فيها منضدة (مربعة أو مستطيلة أو مستديرة) وأعمدة تلغراف عبارة عن أعواد كبريت يرتكز كل منها على قاعدة من الصلصال، ويعرف الطفل بأن الخط المستقيم من الأعمدة هو ما يكون على جانب طريق طوالى (مستقيم) ويثبت أول وآخر عمود فى مكانهما ويطلب من الطفل أن يضع باقى الأعمدة بينهما بحيث يكون خطا مستقيما، وهنا تظهر مراحل النمو على غرار المراحل التى ذكرناها فى التجارب الأخرى. فنجد أن الطفل فى المرحلة الثانية يضع الأعمدة كل بجانب الأخرى فى خط لايمكن القول عليه بأنه مستقيم وهنا تظهر استخدام الطفل

للخصائص التوبولوجية فى تمثيله للنواحى الفراغية، إذ أن كل ما يعمله الطفل هو حفظ خاصية الجوار التوبولوجية بين نقطتين. وفى بداية المرحلة الثالثة نجد أن الخط الذى يكونه الطفل يعتمد على شكل المنضدة ووضع نهايتى الأعمدة، فاذا وضع العمودان فى ركنين من أركان المنضدة (المستطيلة) فان الطفل يكون خط قريبا من المستقيم، أما إذا كانت المنضدة مستديرة فالخط يكون منحنيا تبعا لحرف المنضدة. أما إذا وضع العمودان فى منتصفى الحرفين المتلاقيين للمنضدة (المستطيلة) فان الطفل لا يستطيع عمل مثل هذا المستقيم، حتى إذا وصل الطفل إلى المرحلة الرابعة فانه يصير قادرا على تكوين الخط المستقيم و يستعمل الطفل هنا المنظور فى ترتيب الأعمدة بأن يضع رأسه بحيث تختفى جميع الأعمدة وراء العمود الأخير، و يقول بياجيه أن الطفل يستخدم فى ذلك الخاصية الاسقاطية وتتوقف قدرة الطفل على عمل الخط المستقيم على قدرته على تنسيق منظور الخط حتى يبسط إلى نقطة بالنسبة إلى بقية المناظير الأخرى.

أما بالنسبة لمفاهيم التشابه فقد وجد بياجيه أن مفهوم التشابه لطفل فى المرحلة الأولى لا يعنى له شىء إلا من الوجهة التوبولوجية (الأشكال المتشابهة المستوية كلها منحنيات بسيطة مقفلة) أما فى المرحلة الثانية (٤ ½-٦ ½ سنة) فتبدأ فكرة التشابه فى الظهور ولكن بصورة سطحية أى يستطيع الطفل أن يفرق بين المربع والمستطيل ولكن إذا سئل الطفل أن يرسم مستطيلا يشابه نموذجا لمستطيل فانه يبالغ فى استطالة المستطيل (يزيد من طوله) ولا يكون للطفل هنا فكرة عن محاولة مقارنة الأضلاع أو قياسها، و يظهر مفهوم التشابه بين المثلثات عن طريق الأضلاع المتوازية فقط، أما عن طريق الزوايا فيظهر فى مرحلة متأخرة.

و يلاحظ أن الأطفال فى المرحلة الثالثة يأخذون فى الحسبان عاملا واحدا مثل ارتفاع أو طول قاعدة الشكل (مثلث مثلا) عندما يحاولون مشابهة الشكلين.

وفى المرحلة الرابعة فقط يستطيع الطفل أن يرتب العلاقات فى أنظمة ثابتة بحيث يكون لكل علاقة معكوس وتصبح للعلاقة خاصية الانتقال ولا يؤثر عليها عوامل إدراكية حسية كما سبق فى المراحل السابقة، إلا أنه حتى هنا يكون فهم الطفل للعلاقات الاقليدية بسيط.

الاستفادة من دراسة نمو مفاهيم الفراغ فى التدريس:

١ ــ وجوب اشتراك الطفل عن طريق اللعب والاستكشاف فى استخلاص مفاهيم الفراغ.

٢ ــ اعطاء بعض المفاهيم الأولية المبسطة فى التوبولوجى والهندسة الاسقاطية قبل اعطاء العلاقات الاقليدية.

٤.٣ ــ نمو مفاهيم القياس:

بين بياجيه عن طريق تجاربه المتضمنة الخواص القياسية للفراغ كيف يمر الطفل بمراحل تكون فيها فكرته مشوشة عن علاقات الأطوال والمسافات إلى مراحل تتبلور فيها مفاهيم القياس حتى يستطيع عمل وسائل يقارن بها الأطوال والمساحات والحجوم.

ومن تجاربه الشيقة على صب سائل من إناء فى إناء أضيق وتجارب على صلصال استطاع بياجيه أن يستخلص أن مفهوم الحجم يكون مرتبطا بالمظاهر الادراكية فى المرحلة الثانية وفى المرحلة الثالثة يتكون مفهوم حفظ الحجم إلا أن قانون الحجم لا يتكون إلا فى المرحلة الرابعة.

ومن التجارب الشيقة فى دراسة نمو مفهوم الطول تجربة استخدم فيها نموذج لبرج مكون من كتل خشبية على منضدة و يوضع عدد آخر من كتل خشبية وشرائط من الورق والعصيان على منضدة أخرى و يطلب من الأطفال عمل برج من هذه الكتل له نفس ارتفاع البرج الأول. وعندما ينتهى الطفل من عمل البرج يسأل عما إذا كان البرجان لهما نفس الارتفاع. وقد وجد بياجيه أن الأطفال فى المرحلة الأولى يقارنون بالنظر أما فى المرحلة الثانية فهم يستخدمون أيديهم ليقربوا بين البرجين، وفى نهاية المرحلة الثانية يستخدمون ارتفاع كتفهم

أو أذرعهم كوسيط بين البرجين أما فى المرحلة الثالثة فيستطيعون استخدام شيء (عصا مثلا) له نفس ارتفاع البرجين ليقيسوا به.

وهنا يكون الأطفال قد استوعبوا أنه إذا كانت أ=ب، ب=حـ فان أ=حـ، إلا أنهم حتى هذه المرحلة لا تكون عندهم فكرة كاملة عن وحدة القياس، ففى بداية المرحلة الثالثة يستطيع الطفل أن يقارن ارتفاع البرجين باستخدام عصا طويلة بأن يعلم عليها ارتفاع أحد البرجين ولكن لا يستطيع الطفل القيام بهذه المقارنة باستخدام عصا قصيرة.

أما قدرة الطفل على استخدام وحدة القياس فتظهر فى نهاية المرحلة الثالثة عندما يظهر مفهوم حفظ الطول أى عندما يفهم الطفل أن الطول لا يتغير بتغير الموضع، وكذلك لا يتغير ارتفاع البرج إذا تغيرت طريقة قياسه وعندما يفهم أن الطول يمكن أن يجزأ إلى أطوال أصغر، أى يتكون من تجميع أطوال أقصر.

وفى تجارب أخرى تبين أن الطفل ابتداء من المرحلة الثالثة يكون واعيا بخاصية التماثل للمسافات أى بعد س عن ص هو بعد ص عن س.

أما بالنسبة لنمو مفاهيم المساحات فقد ظهر من تجارب بياجيه أن الطفل لا يستطيع فهم حساب المساحات المستطيلة قبل المرحلة الرابعة (خاصة ١١ سنة). فقد يستطيع الطفل فى أوائل المرحلة الثانية أن يقوم بعد وحدات من المربعات الصغيرة التى تحتويها مساحة معينة والتى تحتويها مساحة أخرى ولكنه لا يستطيع أن يميز أى المساحتين أكبر.

أما فى الجزء الثانى من المرحلة الثالثة فان الطفل يصير قادرا على ايجاد المساحة بواسطة استخدام وحدة القياس ولكنه لا يفهم قبل المرحلة الرابعة معنى حاصل الضرب فى ايجاد مساحة المستطيل مثلا لأنه يتوقف على نمو المنطق فى المرحلة الرابعة.

الاستفادة من دراسة نمو مفاهيم القياس فى التدريس:

١ ــ الدراسة التقليدية للقياس التى تنصب على إعطاء القوانين لاتتمشى مع نمو مفاهيم القياس وعلى ذلك يجب أن يعتمد تدريس القياس على التمهيد لمفاهيم القياس عن طريق اشتراك التلميذ فى أنشطة متعلقة بالقياس (بعصى تمثل قطع مستقيمة، مستطيلات، كميات من ماء، طين، ...) حتى يستطيع أن يدرك التلميذ أن:

(أ) علاقة التكافؤ ≡ (طول يطابق طول ــ مساحة تطابق مساحة أو تكافىء مساحة أخرى ...)

(ب) علاقة > وهى علاقة أكبر من أو عكسها علاقة < .

(حـ) العملية ∗ وهى مثلا تجميع طولين ليكونا طول أطول أو تجميع مساحتين أو وزنين.

(د) مونوتونيه العملية ∗ أى أ≡ب ، حـ≡د⇐أ∗حـ≡ب∗د بفرض وجود أ، حـ، ب، د.

٢ ــ استخدام الأجهزة والوسائل الملموسة لاستخلاص مفاهيم الطول الوزن، المساحة. مثل استخدام قضبان كوزينير التى جعلت فيها القضبان التى لها نفس الطول يكون لها نفس اللون، يستطيع الطفل أن يصل منها إلى أن اللون يمثل عائلة متكافئة من القضبان المحدودة ومن ثم فان الطول يتمثل فى ذهن التلميذ على أنه عائلة من المستقيمات المحدودة، والمساحة على أنها عائلة متكافئة من المستطيلات (باستخدام تجارب على المستطيلات).

٣ ــ تقديم الأعداد القياسية على أنها وسيلة قياس ــ إذ يمكن ايجاد مثلا أى طول بأن ننسبه إلى الفئة المتكافئة من الأطوال (أو اختيار فصل متكافىء على أنه وحدة طول).

٥.٣ ــ نمو مفاهيم المنطق:

لقد ظهرت أهمية المنطق الرمزى فى كثير من المجالات وبخاصة فى تصميم منطق ورياضيات العقل الالكترونى، وفى علم الأحياء وفى دراسة الشبكات العصبية حتى أن بياجيه أدرك أهميته واستعان به فى

تحليل الأنشطة العقلية للطفل إذ آن جبر المنطق كما يعتقد بياجيه يمكن أن يعطى طريقة دقيقة لتحديد التركيبات التى تظهر فى تحليل العمليات التفكيرية.

وكان المنطق الذى استخدمه بياجيه مناظرا لمنطق الجبر البولى ويتكون من :

١ — عناصر س ، ص ، ... تشير كل منها إلى فرض والعمليات التى تجرى على هذه العناصر هى النفى ∽ ، ربط العطف «و» ، ربط التفضيل أو ∨ ، التضمين ⊏ (أى ⇐).

٢ — الفصل وهى تناظر الفئة والعمليات على الفصول تشابه العمليات على الفروض وأعطى لها إشارتى + ، × (أى تناظر ⊔ ، ⊓).

٣ — ١٦ عملية فرضية ايسومورفيه مع جدول الصواب والخطأ.

٤ — مجموعة ابدالية.

٥ — التكعيبات (أو نصف تكعيبة).

ولقد اتضح من تجارب بياجيه الخاصة بمفاهيم الأعداد وغيرها أنه فى مرحلة العمليات الملموسة تأخذ العمليات صفة العكسية (المعكوس) وصفة الحفظ ولقد رأينا أن لهذه العمليات أثر بالغ فى تكوين مفاهيم العدد والقياس والعلاقات الفراغية.

هذا ولو أن هذه العمليات المحسوسة تدخل ضمن منطق الفصول والعلاقات إلا أنها لا تأخذ فى الحسبان التجمعات (التباديل والتوافق) الممكنة.

وقد يتبين أن العمليات المحسوسة لا يمكن أن تكون مجردة لأنها لا يمكن أن تنفصل عن المادة (الأشياء الحقيقية) من جهة ومن جهة أخرى لأنها غير مركبة إذ أنه بواسطة هذه العمليات يمكننا أن نصف أو نرتب أو نعمل تناظرا أحاديا ولكننا لا يمكن تركيبها لتكون تركيبا كليا.

أما فى المرحلة الرابعة (مرحلة العمليات المجردة) فان منطق الطفل البالغ يختص بالفروض عنها بالأشياء وتتكون فى هذه المرحلة العمليات المنطقية مثل التضمين (أى $\Leftarrow$)، الربط و(أى $\vee$)، الضرب المنطقى $\wedge$ وهذه العمليات تختص بالبرهنة والاستنتاج والاستدلال وليست مثل العمليات المحسوسة التى تختص بوصف العلاقة بين الأشياء وعلى العموم فان هذه المرحلة تتضمن ظهور ما يأتى :

١ ــ منطق الفروض وهو تركيب مجرد ومستقل عما يحتويه وهو أيضا تركيب عام ينسق ويوافق العمليات المنطقية إلى نظام واحد، وهو يناظر منطق الرياضيات وبخاصة منطق الجبر البولى أو التركيبات الرياضية .

٢ ــ سلسلة من العمليات مستقلة عن منطق الفروض ومستقلة بعضها عن البعض مثل عمليات التجميع (التوافيق، التباديل، ...)، عمليات النسبة، عمليات الاتزان الميكانيكى الخاصة بمساواة الفعل ورد الفعل .

الاستفادة من دراسة نمو مفاهيم المنطق فى التدريس :

١ ــ تقديم التركيبات الرياضية القائمة على النظام البديهى فى المرحلة الثانوية (والاعدادية فى السنوات الأخيرة) مثل الهندسة الآفينية، المجموعات والتركيبات الجبرية، المنطق الرياضى .

٢ ــ تقديم المنطق الرياضى يؤدى إلى فهم التحليل الرياضى وطبيعة البرهان حيث بينت بعض التجارب أن التلميذ سن ١٩ سنة الذى يقدم له المنطق الرياضى يجد صعوبة فى نفى الصيغ ويصبح غير متعود على البرهنة .

٦.٣ ــ نتائج عامة من أبحاث بياجيه مما يخص تطوير المناهج وتدريس الرياضيات :

يمكننا أن نقول أن دراسات بياجيه كان لها أصداء واسعة فى التربية بصفة عامة وفى تدريس الرياضيات بصفة خاصة فمن نتائجها :

١ ـ بالنسبة للمادة الرياضية أدخلت بعض موضوعات حديثة فى الرياضيات ظهر أنها أساسية فى فهم المفاهيم الرياضية مثل التناظر الأحادى ـ الفئات ـ النظم العدية بقواعد مختلفة ـ المتغيرات ـ الدوال فى صورتها العامة ـ أجزاء من نظرية المعادلات ـ التركيبات الرياضية ... المنطق الرياضى.

٢ ـ بالنسبة لطريقة التدريس:

(أ) إدخال طرق مثل طرق الاكتشاف، التدريس عن طريق النماذج، الأجهزة، ميكنة التدريس والتعليم المبرمج وهى تختص بزرع المفاهيم كخطوة أولى ثم اكساب المهارة والتكنيك، وتختص طرق الاكتشاف والنماذج والأجهزة بالطريقة التركيبية فى التعلم حيث يكتشف (أو يخترع) الطفل المفهوم من التركيب الذى يتضمنه.

(ب) تعديل المنهج بما يتمشى مع طبيعة تفكير الطفل فى المراحل المختلفة. ومن الممكن تقديم أى مفهوم لأى طفل (كما قال برونر) بالصورة التى يتشكل و يتكيف بها عقله فى هذا السن.

وقد ظهر من تجارب أجراها دينيز وغيره أنه يمكن إعطاء طفل المرحلة الابتدائية المفاهيم التى كانت تعطى فى المرحلة الثانوية إذا قدمت بطريقة غير مجردة وباستخدام أشياء محسوسة وأجهزة لاستخلاص هذه المفاهيم عن طريقها. من هذه المفاهيم المعادلات عن طريق الموازين، المتجهات عن طريق أطباق وفناجين، الأعداد بقواعد مختلفة عن طريق قضبان كوزينير أو مكعبات دينيز، كما أن مقررات فى الرياضيات الحديثة كانت تدرس فى الجامعة أصبحت الآن فى متناول تلاميذ المرحلة الاعدادية والثانوية، هذا علاوة عل المواضيع الجديدة التى ذكرناها.

٣ ـ بالنسبة إلى تعلم الرياضيات: أحدثت أعمال بياجيه تطورا فى نظرية تعلم الرياضيات، وقد قام دينيز وسكمب بدراسات فى هذا المجال. وتقوم نظرية دينيز فى تعلم الرياضيات على أساس اعتبار أن التعلم يسير فى دورات متعاقبة كل دورة منها تتكون من ثلاث مراحل

هى اللعب، التكوين أو البناء، التحقيق. فعندما يقابل الطفل تركيبا ما فانه يقوم عن طريق لعبه (تنقيبه بيده، البحث عن قانون للعب الذى يقوم به أو تمثيله...) باكتشاف نظام هذا التركيب ثم بعد ذلك يكون الطفل من المتغيرات الرياضية التى يلاحظها تركيبا آخر يساعده على حل مشكلة أمامه (أو فهم التركيب الأصلى) وتكون مرحلة التكوين أو البناء هذه تابعة لمرحلة التفكير الحدسى أى يحس الطفل بالتركيب قبل أن يتضح له. ثم يتبع مرحلة التكوين هذه مرحلة يحقق فيها الطفل اكتشافه ويحلله ليثبت صحته. وهنا تظهر فى نظرية دينيز أهمية اللعب أو الممارسة وأهمية التركيب (وأنه يسبق التحليل) والاستمرار (الدورية) وهى كلها ركز عليها بياجيه، إلا أن دينيز عممها فى تعليم مفاهيم الرياضيات فى أى سن حتى للمخترع الرياضى. وقد وضح دينيز مبدأين أساسيين يقوم على أساسهما التجريد الرياضى أولهما التغير الادراكى وثانيهما التغير الرياضى. وينص المبدأ الأول على أنه لابد للطفل أن يقابل مفهوما ما فى أوضاع إدراكية مختلفة. أما المبدأ الثانى فينص على أنه لابد من وقوف الطفل على المتغيرات الرياضية للمفهوم قبل أن تتم عملية التجريد. فمثلا لاستنتاج قانون مساحة متوازى الأضلاع يجب أن يقدم للطفل متوازى أضلاع فى أوضاع مختلفة ليساير المبدأ الأول، ومتوازيات أضلاع مختلفة الأبعاد والزوايا ليساير المبدأ الثانى.

أما سكمب فقد وضح أنه بينما المفاهيم الأساسية مثل الفئات، التناظر الأحادى، الجمع... يمكن أن تنمى عن طريق أجهزة تركيبية إلا أن المفاهيم المركبة التى تعتمد على ،اهيم كثيرة أساسية ولها طبيعة أكثر تجريدا تحتاج إلى طريقة مجردة فى تقديمها إلا أن عمله لايزال محتاج إلى تجريب أكثر.

والواقع أنه لا يوجد ثم طريقة واحدة للتعلم بالاكتشاف أثارتها أعمال بياجيه. فالثورة التى حدثت فى مناهج الرياضيات لادخال الرياضيات الحديثة صحبها نداء من الرياضيين والرياضيين التربويين الأوائل المطورين لهذه المناهج باستخدام طرق الاكتشاف. ومن الممكن

أن نقول أنه ظهر اتجاه سيكلوجى حديث لتحليل العملية التعليمية نتج عنه طرق حديثة مختلفة أساسية مبلورة للتعلم. فمثلا بلور برونر بعض أفكار بياجيه الخاصة بالاكتشاف فقدم أسلوبا نظريا للتعلم بالاكتشاف. وقد ركز برونر فى نظريته على الخبرة الملموسة للمتعلم ولعبه بالمواد وقدم ثلاثة مراحل للتعلم بالاكتشاف يمر بها المتعلم وهى: (١) مرحلة النشاط حيث يتعامل فيها المتعلم مع الأشياء المحسوسة مباشرة، (٢) مرحلة الصور الذهنية حيث يفكر المتعلم فى الأشياء ذهنيا دون التعامل المباشر معها، (٣) المرحلة الرمزية حيث يتعامل المتعلم بالرموز مباشرة بطريقة مجردة. والاكتشاف فى نظر برونر ليس شيئا خارجا عن المتعلم ولكنه يتضمن إعادة تنظيم الأفكار المعروفة سابقا فى ذهنه و بين التنظيم الموجود فى الشىء الجديد الذى يقابله والذى يجب أن يطوع تفكيره له ببنائه تنظيما جديدا يتفق معه.

أما جانييه Gagneé فقدم طريقة للتعلم الموجه بلور فيها أفكار بياجيه الخاصة بنتائج تجاربه التى بينت أن تكوين المفاهيم يتطلب تكوين مفاهيم أولية فى ذهن الفرد (مثل تكوين مفاهيم الفئات، والعلاقة < ، >، والعدد الترتيبى والكاردينالى، والفئات المتكافئة، والتناظر الأحادى قبل تكوين مفهوم العدد). وتعتمد نظرية جاينيه للتعلم الموجه على مبدأ تحليل العمل ليوجه التعليم توجيها كليا. فهو يحلل العمل الذى نود أن يتعلمه الفرد ليبنى الأعمال المتطلبة لتعلمه. فيسأل جاينيه ما الذى يمكن أن نحتاج إليه لتعلم هذا العمل، فمثلا لا يمكنك أن تتعلم العمل س إلا إذا عرفت العملين المتطلبين أ، ب، ولكى تستطيع عمل العمل أ يجب أن تكون قادرا على عمل العملين المتطلبين حـ، د... ومن ثم يستطيع الفرد أن يبنى الهرم التعليمى من المتطلبات الأولية إلى متطلبات العمل (أو بما أسماه بالمقدرة) المطلوب. وبعد تكملة هذه الخريطة من المتطلبات يطبق جاينيه اختبارات تشخيصية يحدد ما الذى أتقن فعلا منها. ومن نمط الاجابات لهذه الاختبارات يتحدد بدقة ما الذى يجب أن يدرس (هذا النموذج يؤدى إلى برمجة للمادة الرياضية والتعلم المبرمج). وعندما

تبنى المتطلبات التعليمية تدرس بطريقة محكمة يمكن بنائها من التحليل السابق.

وقد ظهرت.طرقا كثيرة بين الاكتشاف الموجه لبرونر والتعلم الموجه لجاينيه. وهى تسمى بطرق الاكتشاف الموجه. وفى الاكتشاف الموجه يوجه التلميذ بعناية على خط معين ليكتشف التنظيمات والحل بنفسه وهو يمد بارشادات بأسلوب برنامجى ولكن الصيغة الحقيقية للمبدأ أو حل المشكلة تترك له. وتختلف طرق الاكتشاف الموجه بالنسبة لدرجة التوجيه فيها (وقد استخدم برونر نفسه شيء من التوجيه فى تجاربه). وقد ميز ويتروك درجة ونوع التوجيه عن طريق عما إذا كانت القاعدة أو الحل أو كليهما معطى للمشكلة التى تدرس كما ينبي الجدول الآتى:

القاعدة	الحـــل	نوع التوجيه
معطى	معطى	إلقـــاء
معطى	غير معطى	إكتشاف موجه قياسى (استنتاجى)
غير معطى	معطى	إكتشاف موجه استقرائى
غير معطى	غير معطى	إكتشاف محض

ولو أن طرق الاكتشاف مستحبة وأتضحت فاعليتها التطبيقية فى المراحل المدرسية وخاصة المرحلة الأولى إلا أن أوسابل Ausubel يعارضه فى المراحل الأعلى. فهو يعتقد أن التعلم بالاكتشاف مفيد فى بداية تكوين الأساسيات المفاهيمية إلا أن معظم التدريس التالى يمكن أن يتقدم بفاعلية أكثر عن طريق التعلم بالالقاء. ومن ثم فقد قدم أوسابل طريقته للتعلم الالقائى بالمعنى وتعتمد على مبدئه بتقديم المنظم المتقدم، وقد وصف أوسابل المنظم المتقدم بأنه صيغة شفوية أو تحريرية مقدمة قبل المادة المراد تعلمها وتكون على درجة أعلى من التجريد والعمومية والاحتواء من المادة المراد تعلمها. ويفترض أوسابل

أن المنظم المتقدم يقوم بملاءمة الموضوع الجديد عن طريق احضار المعلومات السابقة المألوفة للمتعلم وعمل إثارة للتعلم المقبل وعمل ما أسماه برسو فكرى. أى أن التعلم فى نظره (مثل برونر) يكون من أعلى السلم التعليمى ولكن بطريقةالالقاء (التقليدية)، بشرط أن تكون ذا معنى وتتفاعل مع البناء التعليمى للفرد ولا تكون بالحفظ.

وعلى العموم فان طرق التعلم الحديثة التى ذكرناها وخاصة طرق الاكتشاف (والاكتشاف الموجه) إقترنت بموجة تحديث رياضيات البرامج المدرسية وخاصة المراحل الأولى حتى كاد يضمغها البعض و يعتبرها البعض وجه من أوجه الرياضيات الحديثة والبعض الآخر يعتبرها نفسها الرياضيات الحديثة.

٤ ــ بالنسبة للتربية: لقد أصبح من متطلبات المجتمعات (النامية، المتقدمة)أن يكون الهدف الأساسى للتربية هو إعداد رجال قادرين على عمل أشياء جديدة (أى رجال قادرين على الاختراع والاكتشاف والابداع والتجديد) وليس مجرد رجال يقومون بتقليد ما عمله غيرهم.

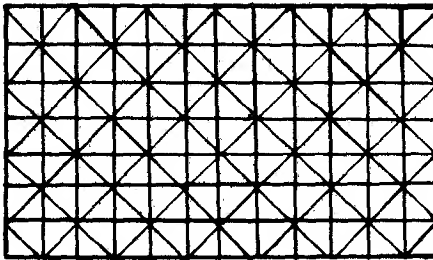
أما الهدف الثانى فهو خلق عقول تنقد أو تقوم بتحقيق شىء ما وصل إليه غيرهم. و يقوم على أساس تكامل هذين الهدفين إعداد المجتمع بما يحتاج. وقد ركز بياجيه على الهدف الأول عندما بين أهمية التركيب فى العملية التعليمية فقال: «إن السؤال الذى يجب أن يسأل هو ما إذا كنا ندرس التركيب أو نقدم للطفل الظروف التى تهيئه ليكون نشطا و يستطيع أن يخلق التركيبات بنفسه... هدف التربية ليس فقط العمل على زيادة كمية المعلومات ولكن العمل على مساعدة الطفل بكل الطرق الممكنة ليخترع و يكتشف بنفسه، ويختص التدريس بخلق الظروف التى تساعد على أكتشاف التركيبات ولا يختص بالمرة بنقل التركيبات التى يمكن أن تستوعب على مستوى لغوى فقط»، ومن أصداء ذلك فى التربية تربية العقول الخلاقة والناقذة.

٧.٣ ــ أمثلة من تدريس بعض الموضوعات بما يتمشى مع أفكار بياجيه:

الطريقة المتبعة هى تقديم المفاهيم الرياضية .متضمنة فى التركيبات والوسائل المختلفة و يترك للتلميذ تكوين المفهوم فى ذهنه عن طريق نشاطه الايجابى فى القيام بالأعمال الذهنية أو الأشياء الحسية و بحثه عن الأنماط الرياضية والكشف عن العلاقات الرياضية ليعيد اكتشاف أو بناء الحقيقة ــ المفهوم ــ التركيب ــ القاعدة ــ النظرية ــ التطبيق . و يكون دور المدرس هو اتاحة الفرصة للتلميذ ليكون نشطا يتعامل مع الأشياء والرموز و يضع الأسئلة و يبحث بنفسه عى أجوبتها و يوافق ما يجده فى وقت ما وما يجده فى أوقات أخرى و يقارن بين ما يجده ، وما يجده زملاؤه . و يكون المدرس متفهما لطبيعة تفكير التلميذ وتكوين المفهوم الرياضى قد يأخذ مدة أطول مما لو قيل له بتعريف لغوى . ومن ثم يساعد التلميذ على الفهم العميق لأساسيات المادة حتى يعرف كيف ولماذا يستنتج أى قانون أو مفهوم رياضى أو يتكون أى نظام أو تركيب رياضى .

١ ــ نظرية فيثاغورث :

(أ) يقدم للتلميذ نموذج من بلاط مزخرف يكون فيه البلاط المثلث أسود وأبيض كما فى شكل (١) و يطلب من التلميذ أن



شكل (١)

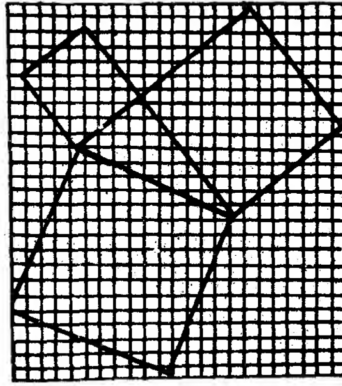
يعمل نسخة منه فى كراسته ثم يطلب من التلميذ أن يظلل أحد المثلثات الصغيرة و يلون المربعات على أضلاعه وندعه يلاحظ أن

المربعين على الضلعين المتساويين متساويان فى المساحة (متطابقان) أيضا، ثم يسجل عدد البلاطات الصغيرة (المثلثية) التى تملأ كل مربع ويدون نتائجه فى جدول كجدول (١). ثم يأخذ مثلثا آخرا أكبر من الأول (يتكون من مثلثين مثلا) ثم يقوم بقياس عدد المثلثات الصغيرة التى تكون المربعات المنشأة على أضلاعه ثم يعيد ذلك بالنسبة لمثلثات أكبر وهكذا. ومن الجدول (١) نتيح للتلميذ الفرصة ليستنتج العلاقة بين الأعداد فى الأعمدة ب، حـ، د.

عدد البلاطات الصغيرة التى تكون المثلث (أ)	عدد البلاطات التى تكون المربع المنشأ على		
	الضلع الأصغر الأول (ب)	الضلع الأصغر الثانى (حـ)	الضلع الأكبر (الوتر) (د)
(١)			
(٢)			
(٣)			

جدول (١)

(ب) يطلب من التلميذ أن يحسب تقريبا مساحة المربعات على أضلاع مثلث قائم الزاوية مرسوم على ورقة مربعات كما فى شكل (٢) ويدون ملاحظاته فى جدول مثل جدول (٢) وندعه يستنتج العلاقة بين الأعداد فى الأعمدة ب، حـ، د لمثلثات قائمة مختلفة. يطلب من التلميذ أن يرسم مثلثا غير قائم الزاوية ونطلب منه معرفة عما إذا كانت نفس العلاقة محققة بالنسبة للمثلث غير القائم الزاوية.



شكل (٢)

المثلث (أ)	مساحة المربع المرسوم على الضلع الأصغر (ب)	الضلع المتوسط (حـ)	الضلع الأكبر (الوتر) (د)
١ – △ أ ب حـ			
٢ – △ س ص ع			

جدول (٢)

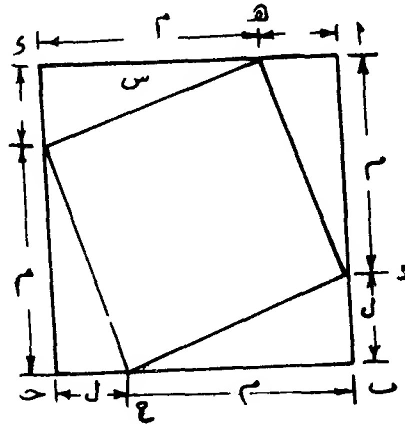
ومن ثم فان التلميذ يمكنه أن يكتشف نظرية فيثاغورث التى تقول «مجموع المربعين المنشأين على ضلعى الزاوية القائمة فى مثلث قائم الزاوية يساوى المربع المنشأ على الوتر (الضلع الأكبر) فى هذا المثلث».

ويجب أن يكون واضحا للتلميذ أنه لكى يمكن تطبيق هذه النظرية على أى مثلث قائم بصفة عامة فان النظرية يحتاج تحقيقها إلى برهان. وكما أمكن مساعدة التلميذ عن طريق النماذج والوسائل أن يكتشف نظرية فيثاغورث (مضمون النظرية) فانه يمكن مساعدته أيضا على اكتشاف برهان هذه النظرية. فمثلا عن طريق الاستعانة بشكل (٣) وبأسئلة تثير التفكير البناء والخلاق يمكن للتلميذ اكتشاف البرهان

بسهولة من النمط الموجود (وهذا ما بينه بوليا فى تجربته).

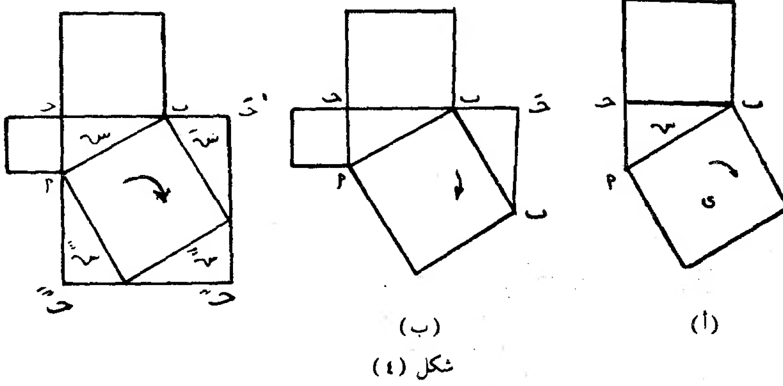
فمن شكل (٣) حيث س مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه ل، م، ن يطلب من التلميذ حساب مساحة المربع اب حـ ى كمربع طول ضلعه ل+م ثم كمربع هـ و حـ ر (طول ضلعه ن) مضافا إليه أربع مثلثات (كل منها يطابق س).

ومن ذلك يستطيع التلميذ أن يصل إلى أن (ل+م)^{٢} = ن^{٢} + ٤ × ½ م ن وهى تؤدى إلى ل^{٢} + م^{٢} = ن^{٢}.



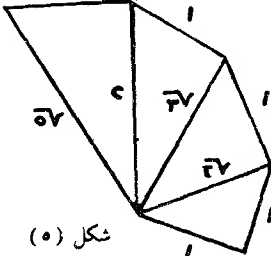
شكل (٣)

وإذا كان التلميذ لديه فكرة عن تحويل الدوران فيمكنه أن يصل بنفسه بسهولة إلى نمط كالموجود فى شكل (٣). فمثلا إذا أخذنا شكل (٤ـ أ)، بدوران المثلث س حول مركز المربع ى المنشأ على الوتر بزاوية ٩٠° مع عقرب الساعة فان س يرسم على سَ و يرسم حـ على حـَ، ب على بَ و يصير حـ ب حـَ ـ حـَ بَ كما فى شكل (٤ ـ ب). بدوران المثلث س حول ى بدورانين آخرين كل منها ٩٠° مع عقرب الساعة فان المثلث س يرسم على سً، سً على سٌ الترتيب كما فى شكل (٤ ـ حـ). وبعد مساعدة التلميذ على تكوين هذا الشكل يمكن مساعدته أيضا على اكتشاف البرهان عن طريق حساب مساحة المربع حـ حـَ حـً حـٌ كمربع طول ضلعه ل+م ثم كمربع داخلى مضافا إليه أربع مثلثات كل منهما س كما بينا سابقا.



شكل (٤)

ويمكن استخدام الطرق التى تساعد على الاكتشاف ليس فقط فى اكتشاف النظريات وبرهنتها ولكن أيضا فى اكتشاف التطبيقات المختلفة. فمثلا يمكن استخدام نظرية فيثاغورث ليكتشف التلميذ طريقة ايجاد جذور مثل √٢ ، √٢ ، √٤ ، √٥ ... بيانيا كما هو موضح فى شكل (٥). أو ليكتشف النمط الذى يساعده على حل بعض المسائل كالنمط الموجود فى الأعداد التالية.



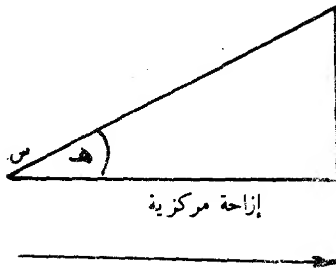
شكل (٥)

٥	١٣	٢٥	٤١	؟	؟
٤	١٢	٢٤	٤٠	٦٠	؟
٣	٥	٧	٩	١١	١٣

تقديم حساب المثلثات :

يمكن تقديم حساب المثلثات لتلميذ المرحلة الاعدادية بالطرق التى تساعد على الاكتشاف كما يأتى :

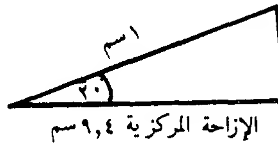
إعطاء فكرة مبسطة عن الازاحات وبأخذ اتجاه إختيارى على أنه اتجاه مركزى . نشير إلى الازاحات فى الاتجاه المركزى بالازاحة المركزية وبالازاحة فى الاتجاه العمودى بالازاحة الجانبية كما فى شكل (٦).



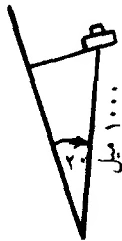
شكل (٦)

ثم إعطاء أمثلة تتمشى مع مبدأى دينيز للمتغير الادراكى والمتغير الرياضى لتساعد التلميذ على أن يكتشف أن الازاحة المركزية والجانبية تعتمد على الزاوية هـ وعلى طول س ص. فمثلا باعطاء س ص طوله ١٠ سم ، هـ = ٢٠° يطلب من التلميذ حساب الازاحة الجانبية والمركزية. وهى على الترتيب ٣,٤ سم ، ٩,٤ سم .. شكل (٧).

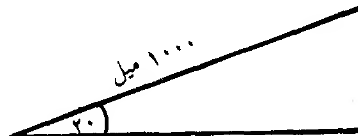
ثم يطلب من التلميذ ايجاد الازاحة المركزية والجانبية للازاحة س ص التى تصنع مع الاتجاه المركزى زاوية ٢٠° بحيث يكون طول س ص : ٢٠ سم، ١٥ سم ، ١ سم ، ١٤ متر، ٧ متر. تعطى أمثلة أخرى تعطى صورة ملموسة تتضمن نفس الفكرة مثل طائرة ترتفع بزاوية ٢٠° ويطلب معرفة ارتفاعها عند تحركها مسافة ١٠٠٠ متر — شكل (٨ — أ). أو باخرة تتحرك فى اتجاه شرق الشمال بزاوية ٢٠° ويطلب ايجاد بعدها عن الشمال عندما تسير ١٠٠ ميل أو ٥ ميل أو ٧ ميل — شكل (٨ — ب).



شكل (٧)



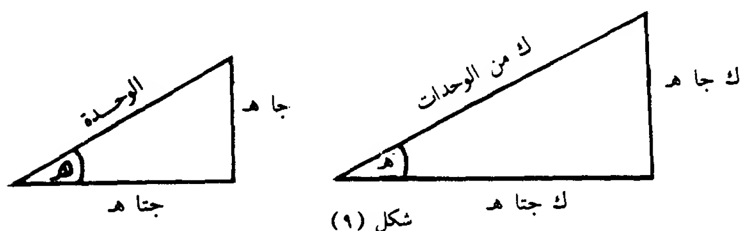
(ب)



(أ)

شكل (٨)

وبذلك يستطيع التلميذ أن يستنتج أنه عندما هـ = ٢٠ فان الازاحة الجانبية = ٣٤, مضروبة فى طول س ص والازاحة المركزية = ٩٤, مضروبة فى طول س ص. ومن الأمثلة المختلفة يستطيع التلميذ أن يتبين أهمية معرفة الازاحة الجانبية ٣٤, ، المركزية ٩٤, للزاوية ٢٠° عندما تكون طول س ص الوحدة لأن ذلك يسهل ايجاد الازاحات الجانبية والمركزية عندما تكون الازاحة س ص بأى طول. ثم يقدم إسما لكل من الازاحة المركزية والجانبية للزاوية عندما تكون الازاحة س ص هى الوحدة والاسمان على الترتيب هما جيب وجيب تمام الزاوية ويرمز لهما بالرمز جا هـ ، جتا هـ على الترتيب (شكل ٩).



شكل (٩)

٣ ـ الرسم البيانى للدالة من الدرجة الثانية واكتشاف الدلالة الهندسية لثوابتها :

باعطاء التلميذ الشكل البيانى ص = س٢ يطلب منه تحريك المنحنى وحدات صحيحة ن إلى أعلى وإلى أسفل حتى يكتشف القاعدة ص = س٢ + ن (التى يستنتجها التلميذ من تحريك المنحنى وحدات ١ ، ٢ ، ... ن (شكل ١٠ ـ أ) ثم يطلب من التلميذ تحريك المنحنى أفقيا حتى يصل التلميذ إلى القاعدة ص = (س = ن)٢ شكل (١٠ ـ حـ) ويطلب من التلميذ كيفية عمل منحنى أوسع وأضيق عن طريق بحثه فى الرسم البيانى للمنحنيات ص = س٢ ، ص = $\frac{1}{2}$ س٢ ، ص = ٢ س٢ (شكل ١٠ ـ ب).

وبتحريك المنحنى ص = س٢ أفقيا ورأسيا معا يمكن أن نساعد التلميذ على اكتشاف الصورة : ص = (س ـ س١)٢ + ص١

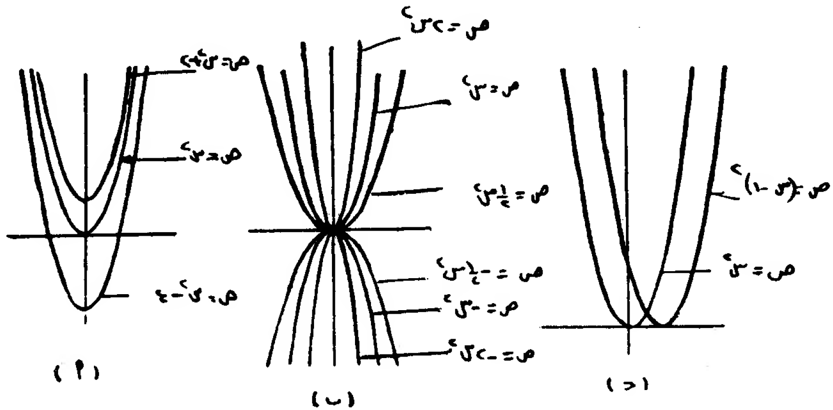
وبهذا يستطيع التلميذ أن يستنتج الدلالة الهندسية للمعاملات فى المعادلة $ص = أس^{٢} + ب س + حـ$.

وعن طريق الطرق الجبرية الخاصة باكمال المربع نتيح للتلميذ استنتاج أن رأسى المنحنى هو النقطة $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، \frac{٤أحـ - ب^{٢}}{٤أ}\right)$.

عندما أ > صفر، ومحور التماثل هو $س = \frac{-ب}{٢أ}$ عن طريق وضع المعادلة على الصورة

$$ص = أ \left[س + \frac{ب}{٢أ} \right]^{٢} + \frac{٤أحـ - ب^{٢}}{٤أ}$$

أنظر شكل (١٠).

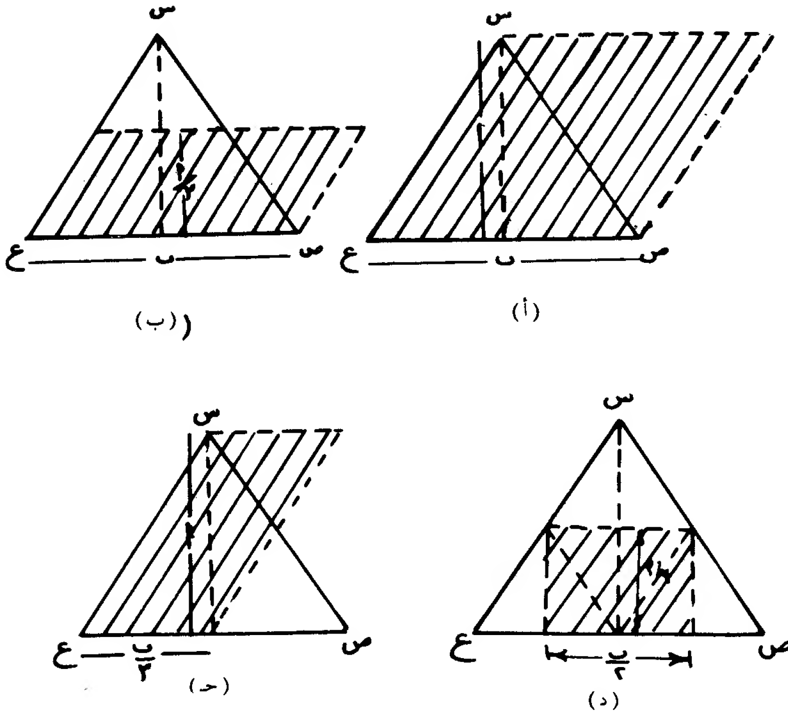


شكل (١٠)

٤ ــ استخدام الوسائل الهندسية فى استنتاج الخواص الجبرية:

. عن طريق الوسيلة الموجودة فى شكل (١١) يطلب من التلميذ حساب مساحة المثلث باستخدام الأشكال المظللة والتعبير عنها بطول قاعدة المثلث ب، وارتفاعه أ فى كل حالة. ثم نتركه يستنتج، خاصية الابدال والتنسيق لعملية الضرب،. وذلك عن طريق الوصول إلى:

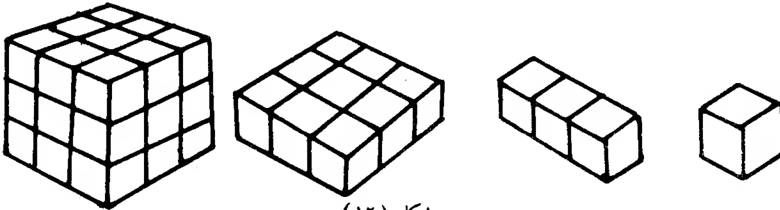
$$\tfrac{١}{٢}أب = (\tfrac{١}{٢}أ)ب = \tfrac{١}{٢}ب(أ) = ٢(\tfrac{١}{٢}أ)(\tfrac{١}{٢}ب)$$



شكل (١١)

٥ ــ استخدام الوسائل (الأجهزة) فى اكتشاف النظم العددية بأسس مختلفة :

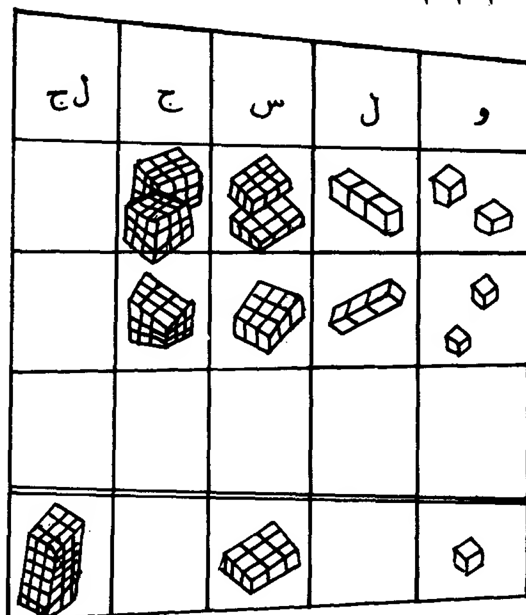
يمكن استخدام وسيلة دينيز لهذا الغرض وتسمى وسيلة دينيز للقواعد المتعددة الحسابية . والوسيلة عبارة عن فئات من المكعبات تعتبر نماذج لنظم عددية بأسس مختلفة . ويوجد أربعة فئات مختلفة لكل نموذج يشار إليها بالوحدات ، الأطوال ، السطوح ، المجسمات . وشكل (١٢) يوضح هذه الفئات عندما يكون الأساس هو ٣ للنظام العدى .



شكل (١٢)

وعن طريق إتاحة الفرصة للتلميذ باللعب بهذه الأدوات وإعطائه لوحة موضح عليها الرموز: و، ل ، س ، ج ، لج لتعبر عن الوحدات ، الأطوال ، المسطحات ، المجسمات ، المجسم المستطيل على الترتيب ، يستطيع التلميذ أن يصل إلى مفهوم النظام العدى بأساس ٣ وإجراء عملية الجمع فى هذا النظام. فمثلا من شكل (١٣) يمكن للتلميذ باستخدام هذه الأدوات التوصل إلى حاصل الجمع الآتى للأعداد بأساس ٣:

و ل س ج ل ج (بأساس ٣)
٢ ٢ ١ ٢
١ ١ ١ ٢
ـــــــــ
بالجمع ١ ٠ ١ ١ ١



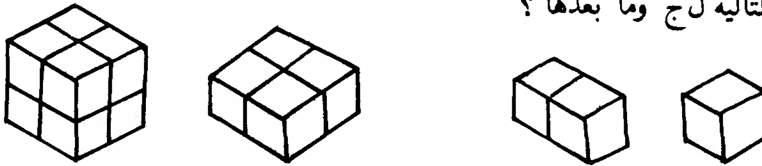
شكل (١٣)

وباستخدام النماذج الأخرى للنظم العدية المختلفة يستطيع التلميذ أن يكتشف النظم العدية بأسس مختلفة ومن بينها النظام العدى بأساس

عشرة المألوف لدينا وهذا ما تتبعه البرامج الحديثة فى تقديم النظم العدية لتلميذ المرحلة الابتدائية.

أما بالنسبة لتلميذ المرحلة الاعدادية فيمكن عن طريق نموذج من النماذج السابقة اكتشاف النظام العدى بأى أساس وليكن بأساس ٢ مثلا مع تكوين الأساس الرياضى المناسب لمستواه.

فمثلا باستخدام و ، ل ، س ، ج الخاصة بالنظام العدى بأساس ٢ كما فى شكل (١٤) نثير أسئلة يكتشف بها التلميذ أن ومثل ١ ، ل تمثل ٢ ، س تمثل $٢^٢$ ، ج تمثل $٢^٣$ ثم نسأل ماذا تمثل الفئة التالية لـ ج وما بعدها ؟



شكل (١٤)

ومن جدول (٣) يطلب من التلميذ أن يعلم فى التعبير عن أى عدد من ١ إلى ٣١ عن طريق ١ ، ٢ ، $٢^٢$ ، $٢^٣$ ، $٢^٤$.

العدد	١	٢	$٢^٢$	$٢^٣$	$٢^٤$
١	✓				
٢		✓			
٣	✓	✓			
٤			✓		
٥	✓		✓		
٦		✓	✓		
٧	✓	✓	✓		
—					
—					
—					

جدول (٣)

وبوضع ١ بدلا من ✓، ٠ بدلا من المكان الخالى يستنتج التلميذ التعبير عن الأعداد بأساس ٢ فمثلا :

١ = ١ (بأساس ٢)
٢ = ١٠ (بأساس ٢)
٤ = ١٠٠ (بأساس ٢)
٥ = ١٠١ (بأساس ٢)

ومن التعبير عن الأعداد المختلفة فى النظام العشرى بالنظام الثنائى (النظام العدى بأساس ٢) يستطيع التلميذ أن يستنتج أن كتابة العدد (التعبير عنه) فى النظام الثنائى هو تعبير وحيد.

ويمكن مساعدة التلميذ على التعبير عن الأعداد فى النظام الثنائى مباشرة عن طريق الفئات المختلفة و، ل ، س ، ج ، الخاصة بالنظام العدى بأساس ٢ (النظام الثنائى).

فمثلا يصل التلميذ إلى أن ٧ = ١ × و + ١ × ل + ١ × س

$٧ = ١ \times ١ + ١ \times ٢ + ١ \times ٢^{٢}$

ومنها يمكن التعبير عن ٧ بالعدد ١١١ بأساس ٢

ثم يطلب من التلميذ ايجاد أكبر عدد يمكن وضعه عن طريق الفئات المختلفة و، ل ، س ، ج ، ل ج .

أو عن طريق ١ ، ٢ أو ١ ، ٢ ، $٢^{٢}$ أو ١ ، ٢ ، $٢^{٣}$ ، $٢^{٤}$ ، حتى يستطيع التلميذ أن يصل إلى القاعدة .

$$١ + ٢ + ٢^{٢} + ٢^{٣} + \cdot + ٢^{ن-١} = ٢^{ن} - ١$$

ويمكن أن نساعد التلميذ أن يكتشف قاعدة تحويل العدد من النظام العشرى إلى النظام الثنائى وبالعكس أو يمكن إعطاءه القاعدة ونطلب منه ايجاد تفسير لأساس هذه القاعدة.

فمثلا ٢٣ بأساس ١٠ = ١٠١١١ بأساس ٢ عن طريق القسمة المقابلة على ٢ وكتابة الباقى كما يتضح من الآتى :

الباقى	٢٣	٢
١	١١	٢
١	٥	٢
١	٢	٢
٠	١	٢
١	٠	

وهذه الصورة تكافىء ١٦ + ٤ + ٢ + ١ = ٢٣

وبالمثل يمكن مساعدة التلميذ على اكتشاف بقية المفاهيم الخاصة بالنظام الثنائى.

٦ ــ خواص الدائرة:

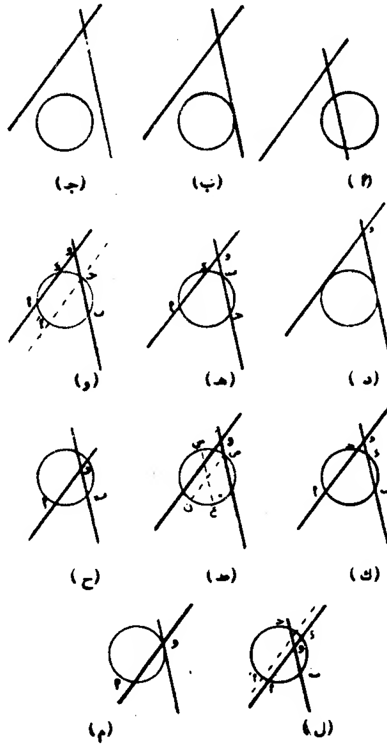
يمكن مساعدة التلميذ (فى المراحل المبكرة) على اكتشاف خواص الدائرة وباستنتاج النظريات الخاصة بها عن طريق بعض النماذج البسيطة (كما سنذكر فى الباب التالى) أو عن طريق استخدام ورق الشفاف.

فمثلا يرسم دائرة على ورق شفاف وبدورانها حول المركز (بتثبيت دبوس مثلا عند مركزها) يمكن للتلميذ أن يصل إلى العلاقات بين الأوتار «المتساوية»، الأقواس «المتساوية»، والزوايا المركزية «المتساوية»، والخاصية التى تقول أن الأوتار المتساوية تكون على أبعاد متساوية من المركز. وعن طريق طى الورق يمكن للتلميذ أن يوجد مركز دائرة مرسومة على ورقة شفاف. وباعطاء التلميذ جزء من دائرة مرسومة على ورقة شفاف يمكن للتلميذ عن طريق الطى وأثر الشكل أن يكمل الدائرة دون أن يوجد مركزها.

ويمكن أن نساعد التلميذ على اكتشاف خواص زوايا الدائرة عن طريق رسم مستقيمين متقاطعين وتحريك ورقة شفاف مرسوم عليها دائرة فى أوضاع مختلفة كالمبين فى شكل (١٥)، (أو رسم الدائرة وتحريك ورقة شفاف مرسوم عليها مستقيمين متقاطعين).

فمثلا بتحريك الدائرة فى الأوضاع المختلفة المبينة من شكل (د) إلى (ك) يستطيع التلميذ أن يصل إلى خصائص الزوايا المركزية والمحيطة والأقواس. وبتحريك الدائرة بحيث يكون القطران موازيين للمستقيمين المتقاطعين حتى يصير القاطع حـ ب مماسا عند حـ كما فى الوضع المبين فى شكل (م) يمكن للتلميذ أن يكتشف النظرية الخاصة بالزاوية بين المماس والوتر.

ويمكن مساعدة التلميذ أن يصل إلى تحقيق وبرهنة مثل هذه الخواص والنظريات عن طريق هندسة التحويلات كما سنبين فيما بعد فى الباب الثانى، وفى هذا الباب أيضا سنعطى أمثلة أخرى لتدريس بعض الموضوعات بما يتمشى مع أفكار بياجيه وغيرها.



شكل (١٥)

البـــاب الرابع

٤ ـ استراتيجيات تدريس أساسيات رياضيات المرحلة الاعدادية :

نـقدم فى هذا الباب استراتيجيات تدريس المفاهيم والموضوعات الأساسية فى جـــبـــر وهـــنـــدســـة المـــرحـــلـــة الاعـــداديـــة بمـــا يـــتـــفـــق والأفـــكـــار والاتجاهـات الحديثـة . وعلى ذلك فاننا سنطبق النتائج المستخلصة من الأبـواب الـسـابـقـة فى تـدريـس (أو بـالأحـرى استراتيجيات تدريس) أساسيـات ريـاضيـات المرحلة الاعدادية مع الاستعانة ببعض الأفكار والاتجاهات الحديثة الأخرى فى هذا الشأن . ومن موضوعات الجبر التى سوف نـعـالجـهـا فى هـذا الباب : الأعداد الموجهة ، التعبيرات والقوانين الجبـريـة ، الكسور الجبرية ، المعادلات ، الرسم البيانى ، حل المشكلات الجـبـريـة . وبالنسبة للهندسة فاننا سنناقش بعض المفاهيم الهندسية عن طـريـق هـنـدسـة الـتـحـويـلات ، النظام البديهى والبرهان الاستدلالى ، تـدريـس الهندسة على أساس بديهى مبسط ، تدريس الهندسة العملية ، بعض الوسائل والأجهزة فى الهندسة مع توضيح طريقة عملها . وعموما فـانـنـا سـنـحـاول من خـلال مـعـالجـة المـواضـوعـات تكوين الأساس الـريـاضـى الـسليم للأساسيات المختلفة ، ومناقشة المداخل المختلفة لبعض المواضوعات مما يساعد على تدعيم الأساس الرياضى للقارىء .

١.٤ ــ الجـــبر:

يـراعـى عـن تـدريـس الجـبـر فى الـمـراحـل الأولى ألا تكون المعالجة تجـريـديـة ولـكـن تـكـون مـعـالجـة الجبر كتعميم للحساب مع الاهتمام بـالـعـمـلـيات وخواصها والانتقال تدريجيا إلى المعالجة المجردة والتركيبات الجـبـريـة فـيـمـا بعد . فعند التعرض لأى نوع من الأعداد يستحسن أن يهـتـم المدرس بـالـعـمـلـيـات المـعـرفـة على هـذا الـنـوع من الأعداد وخواص تـلـك الـعـمـلـيـات . فـفـهـم الـعـمـلـيـات وخـواصـهـا يـسـاعـد التلميذ على تـعـمـيـم خـواصـهـا إلى الجـبـر « مـثـــل ‐ س × + ص ـــ ‐ س ص ، ـــ س × ـــ ص = + س ص » . كـمـا أن فـهـم العمليات الأساسية على

الأعداد القياسية يساعد التلميذ على فهم العمليات الأساسية (أو تعميمها) على الكسور الجبرية، هذا علاوة على أن الاهتمام بالعمليات وخواصها على فئات مختلفة من الأعداد يمهد لتقديم التركيبات الجبرية واستخدام الطريقة البديهية فيما بعد.

وفيما يلي سنقدم فكرة سريعة لبعض أنواع الأعداد وخواص العمليات المعرفة على هذه الأنواع ثم نتعرض إلى استراتيجيات تدريس بعض الموضوعات الأساسية فى جبر المرحلة الاعدادية مثل الأعداد الموجهة، التعبيرات، القواعد (القوانين) الجبرية، المعادلات، الرسم البيانى، حل المشكلات (المسائل) الجبرية مع الاشارة إلى بعض الوسائل أثناء العرض.

١ ــ أنواع الأعداد:

يجب أن يحرص المدرس على أن يعرف ويميز التلميذ بين أنواع الأعداد المختلفة التى يقابلها وأن يعرف خواص العمليات المختلفة على هذه الأنواع من الأعداد. والشكل التخطيطى الآتى يبين أنواع الأعداد التى يتعامل معها التلميذ (تلميذ المرحلة الاعدادبة أو الثانوية).

الفئة ك: الأعداد المركبة = {س: س = أ + ب ت، أ، ب ∈ ح، ت = $\sqrt{-1}$}

الفئة ح: الأعداد الحقيقية (الأعداد الموجهة) — الأعداد التخيلية (أ ≠ صفر، ب = صفر)

الفئة ن: الأعداد القياسية = {س: س = $\frac{حـ}{ء}$، حـ، ء أعداد صحيحة، ء ≠ صفر} — الأعداد غير القياسية

الفئة ى: الأعداد الصحيحة (ء = ١) = {... : ، ±١، ±٢، ±٣، ±...} — الأعداد الكسرية ــ فصول منها، (ء ≠ ١)

الأعداد الصحيحة الموجبة — صفر — الأعداد الصحيحة السالبة

الفئة ط: أعداد طبيعة = {١، ٢، ٣، ...}

الخاصية	الأعداد الطبيعية (ط)	الأعداد القياسية الموجبة (+ق)	الأعداد الصحيحة (ى)	الأعداد القياسية (ق)	الأعداد الحقيقية (ح)	الأعداد المركبة (ك)
الجمع :						
الانغلاق	✓	✓	✓	✓	✓	✓
الابدال	✓	✓	✓	✓	✓	✓
التنسيق	✓	✓	✓	✓	✓	✓
وجود العنصر المحايد صفر	×	×	✓	✓	✓	✓
وجود المعكوس	×	×	✓	✓	✓	✓
الطرح ممكن	×	×	✓	✓	✓	✓
الضرب :						
الانغلاق	✓	✓	✓	✓	✓	✓
الابدال	✓	✓	✓	✓	✓	✓
التنسيق	✓	✓	✓	✓	✓	✓
وجود العنصر المحايد (أ)	✓*	✓	✓	✓	✓	✓
وجود المعكوس	×	✓	×	(ماعدا للعنصر صفر)	(ماعدا للعنصر صفر)	(ماعدا للعنصر صفر)
القسمة ممكنة	×	✓	×	(ماعدا للعنصر صفر)	(ماعدا للعنصر صفر)	(ماعدا للعنصر صفر)
توزيع الضرب على الجمع	✓	✓	✓	✓	✓	✓
التركيب	شبه مجموعة	مجموعة بعملية الضرب أي (+ق ، ×)	مجال صحيح (ومجموعة بعملية الجمع ، حلقة)	حقل (ومجموعه ، مجال صحيح)	حقل (ومجموعه مجال	حقل (ومجموعه ، مجال ، صحيح)

جدول (١)

والجدول (١) يعطى ملخصا لخواص العمليات الأربعة على بعض فئات الأعداد. ويوضح آخر صف فيه التركيبات الجبرية التى تحققها كل فئة من الأعداد التى يستحسن أن يحرص المدرس على تنميتها فى ذهن التلميذ كلما أمكن فى الوقت المناسب.

ويمكن أخذ فئات جزئية من الأعداد السابقة مع دراسة العمليات وخواصها عليها لتتكامل فكرة العمليات وخواصها فى ذهن التلميذ وللتمهيد للتركيبات الجبرية، فمثلا يمكن أخذ فئة الأعداد الصحيحة مقياس ٥ وفيها:

٠ = {٠ ، ± ٥ ، ± ١٠ ، ± ١٥ ، ...}
١ = {± ١ ، ± ٦ ، ± ١١ ، ± ١٦ ، ...}
٢ = {± ٢ ، ± ٧ ، ± ١٢ ، ± ١٧ ، ...}
٣ = {± ٣ ، ± ٨ ، ± ١٣ ، ± ١٨ ، ...}
٤ = {± ٤ ، ± ٩ ، ± ١٤ ، ± ١٩ ، ...}

ومن تكوين جدولى (١)، (٢) لجمع وضرب للأعداد الصحيحة مقياس ٥ يمكن أن نتيح للتلميذ فرص استنتاج خواص هاتين العمليتين على هذه الفئة تمهيدا لمعرفة التركيب الجبرى الذى تحققه (الحقل).

الجمع +	٠	١	٢	٣	٤
٠	٠	١	٢	٣	٤
١	١	٢	٣	٤	٠
٢	٢	٣	٤	٠	١
٣	٣	٤	٠	١	٢
٤	٤	٠	١	٢	٣

(جدول ١)

الضرب ×	٠	١	٢	٣	٤
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢	٣	٤
٢	٠	٢	٤	١	٣
٣	٠	٣	١	٤	٢
٤	٠	٤	٣	٢	١

(جدول ٢)

١.١.٤ ـ الأعداد الموجهة :

تعتبر دراسة الأعداد الموجهة ركن أساسى فى دراسة الجبر، وتعتبر أيضا من أكثر الموضوعات صعوبة فى نمو مفاهيمها. فمعظم القوانين

الخاصة بالأعداد الموجهة (الأعداد الموجبة والأعداد السالبة والصفر) التى يستخدمها التلميذ فى جمع وطرح وضرب وقسمة هذه الأعداد تعتبر نظريات يمكن استنتاجها من خواص تركيب الحقل.

ولهذا فهى تتطلب مستوى نضج أعلى من مستوى التلميذ الذى يقابل هذه القوانين لأول مرة فى مراحل مبكرة. ومن ثم يجب أن يأخذ المدرس فى الاعتبار أن تكوين مثل هذه المفاهيم والقوانين فى ذهن التلميذ المبتدىء تتطلب وقتا وخبرة ملموسة كما أن فهمها يكون على مستويات مختلفة. ولذا يجب أن يحرص المدرس على أن يفهم التلميذ معنى الأعداد الموجهة وأن يستنتج القوانين الخاصة بالعمليات عليها عن طريق وسائل ملموسة أو طرق رياضية قريبة من ذهن التلميذ (كاستخدام طريقة الأنماط) فى المراحل المبكرة وأن يرجىء طرق تحقيقها وبرهنتها، رياضيا، إلى مراحل متقدمة عندما يكون التلميذ مستعدا للطريقة البديهية.

وعموما يستحسن أن يهدف تدريس الأعداد الموجهة للمستويات المختلفة إلى:

(١) أن يفهم التلميذ معنى الأعداد الموجهة.

(٢) أن يفهم التلميذ تعريف كل عملية على الأعداد الموجهة وخواصها عن طريق أمثلة ملموسة وتفسيرات بسيطة فى المراحل المبكرة وعن طريق تركيب الحقل فى المراحل المتقدمة.

(٣) أن يتضح للتلميذ أن العمليات على الأعداد الموجهة تتفق مع العمليات الحسابية التى يعرفها (على الأعداد الطبيعية) ولكنها تعتبر تعميما لها حيث تكون العمليات الحسابية حالة خاصة منها.

(٤) أن يكتسب التلميذ المهارة فى إجراء العمليات الأساسية على الأعداد الموجهة.

وفيما يلى نحاول إعطاء فكرة عن استراتيجيات تقديم الأعداد الموجهة، وتدريس العمليات الأساسية عليها مع ذكر الوسائل التى يمكن الاستعانة بها فى التدريس.

١ ـ تقديم الأعداد الموجهة :

الأعـداد التى يتعامل معها التلميذ قبل تعامله بالأعداد الموجهة هى الأعداد الموجبة (أو بالأحرى الأعداد الطبيعية التى تناظرها) .

ولذا عـنـد تقديم الأعداد الموجهة للتلميذ المبتدىء يجب أن نستعين بخبـراته فى الأعـداد الموجبـة والعمليات عليها لتعميمها على الأعداد الموجهة مع الاستعانة بالوسائل الملموسة التى تستخدم لقياس الكميات التـى تـعـتمـد على الاتجاه . ومن المشوق أن يعرف التلميذ أن الأعداد الموجهة من النـاحية التاريخية عرفت بعد الأعداد الموجبة لدى الهنود ونقلها العـرب للغرب للحاجة إلى وصف الملاحظات الطبيعية التى تتطلب القياس فى اتجاهين متضادين .

ومن ثم فانه للتمهيد للأعداد الموجهة تراجع فئات الأعداد الموجبة (أو بالأحرى الغير موجهة) التى يعرفها التلميذ والعمليات المغلقة عليها وخواصها وكيفية تمثيل الأعداد الموجبة على خطة الأعداد . ونناقش إمكانية إجراء عملية الطرح على فئة الأعداد الموجبة والوصول إلى أنها غير ممكنة بصفة عامة (غير مغلقة) . على هذه الفئة (فمثلا ٣ ــ ٥ ليست عدد موجب) . ولكى يمكن إجراء عملية الطرح يجب أن توسع فئة الأعداد الموجبة . وعن طريق المقاييس المختلفة التى تقيس الكميات التى تعتمد على الاتجاه مثل ترمومتر يقيس درجات حرارة أكبر أو أقل من الصفر أو المقاييس التى تبين الارتفاع أو الانخفاض عن سطح البحر أو تعيين خط الشمال والجنوب (خطوط العرض) يمكن تقديم الأعداد الموجهة للتلميذ بطريقة ملموسة ليتعرف بها على الأعداد الموجهة ومعناها . ولعل من أبسط الوسائل التى يستخدمها المدرس لتساعد التلميذ على فهم معنى الأعداد الموجهة هو خط الأعداد .

وهنا يعرف التلميذ أن الصفر هو نقطة بداية اختيارية على خط الأعداد (وليس مجرد عدد أو شاغل مكان فى كتابة أعداد مثل ٢٠٠ أو ٥٠٣ كما كان يعرف سابقا) ومنه يمكن القياس فى أى من

اتجاهين، الأعداد التى تناظر القياسات فى اتجاه نشير إليها بالأعداد الموجبة، والأعداد التى تناظر القياسات فى الاتجاه المضاد نشير إليها بالأعداد السالبة. ويمكن أن يبدأ المدرس بتمثيل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد باعتبارها فئة جزئية من الأعداد الموجهة واعتبارها مدخلا للأعداد الموجهة بصفة عامة حيث يسهل التعامل مع مثل هذه الأعداد. وهذا ما تتبعه بعض البرامج الحديثة فى تقديم الأعداد الموجهة للمراحل المبكرة حيث تستخدم خط الأعداد الصحيحة ليتعرف التلميذ على للأعداد الموجهة الصحيحة (الأعداد الصحيحة السالبة والموجبة والصفر) والقوانين الخاصة بالعمليات عليها (مثل +٢×-٣=-٦، -٢×-٣=+٦) ثم تعمم على أى عدد موجه (س×ص=-س ص، -س×-ص=+س ص) بعد ذلك.

وباعتبار الأعداد الصحيحة مدخلا للأعداد الموجهة بصفة عامة فان فهم معناها ودلالتها يؤدى إلى سهولة فى فهم معنى الأعداد الموجهة. وإذا كان تقديم الأعداد الموجهة عن طريق المقاييس والوسائل الملموسة وخط الأعداد الصحيحة مناسبا للتلميذ فى المراحل المبكرة فان تقديمها بطرق مجردة يساعد التلميذ فى المراحل المتقدمة على فهم ونمو الطريقة البديهية فى ذهنه. ويمكن تقديم الأعداد الصحيحة لمثل هذا التلميذ كتوسع لفئة الأعداد الطبيعية (لكى يمكن إجراء عملية الطرح عليها) كما يأتى:

فئة الأعداد الصحيحة هى فئة كل الثنائيات المرتبة من الأعداد الطبيعية (أ، ب) التى لها الخواص التالية:

(١) (أ، ب) = (حـ، د) ⇔ أ+د=ب+حـ

(٢) (أ، ب) + (حـ، د) = (أ+حـ، ب+د)

(٣) (أ، ب) × (حـ، د) = (أحـ+ب د، أد+ب حـ)

(٤) يسمى (أ، ب) موجب إذا وجد عدد طبيعى حـ بحيث أن ب+حـ=أ

ومن ثم فان آى ثنائى (أ، ب) يمكن كتابته على أى من الصور (أ، أ)، (أ+حـ ، أ)، (أ، أ+حـ). نقول أن (أ، أ)=صفر، (أ+حـ ، أ)=حـ وهذه نسميها فئة الأعداد الصحيحة الموجبة ونشير إليها +حـ أو +حـ، (أ، أ+حـ)=-حـ وهذه تسمى فئة الأعداد الصحيحة السالبة وقد نشير إليها بالرمز ¯حـ. أى أن الثنائى المرتب (أ، ب) يطابق العدد أ ــ ب.

ويمكن تقديم الأعداد الموجهة بصفة عامة للتلميذ فى مرحلة متقدمة عن طريق هذا المنوال. أى عن طريق تعريف الأعداد الموجهة على أنها فئة كل الثنائيات المرتبة من الأعداد الموجبة (أ، ب) التى لها الخواص الأربعة المذكورة مع الأخذ فى الاعتبار أن الأعداد أ، ب، حـ، د هى أعداد موجبة بصفة عامة.

إلا أنه يمكن للتلميذ فى المراحل المتقدمة أن يصل إلى مفهوم الأعداد الموجهة عن طريق التوسع فى النظم العددية حتى الأعداد الحقيقية (حقل الأعداد الحقيقية) وهنا تتضح للتلميذ أن فئات حزئية من الأعداد الموجهة تكون أيسومورفية مع:

(١) الأعداد الموجهة الصحيحة ...، -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...

(٢) الأعداد الموجهة الصحيحة الموجبة +١، +٢، +٣، ... وهى أيسومورفيه مع الأعداد الطبيعية.

(٣) الأعداد القياسية الموجبة.

(٤) الأعداد القياسية السالبة.

(٥) الأعداد القياسية.

(٦) الأعداد غير القياسية.

٢ ــ العمليات الأساسية على الأعداد الموجهة والقواعد (القوانين) الخاصة بها:

نناقش فيما يلى بعض الاستراتيجيات التى توضح الأفكار الأساسية الخاصة بالعمليات (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة) على الأعداد

الموجهة مع عرض بعض الوسائل المعينة خلال المناقشة . ولما كانت العلامة «ـــ» تستعمل لعملية الطرح وللاشارة إلى العدد السالب ، والعلامة «+» تستعمل لعملية الجمع وللاشارة إلى العدد الموجب مما قد يحدث التباس عند مناقشة الأفكار الأساسية للأعداد الموجهة فاننا سنشير إلى العدد السالب والموجب للعدد أ كما يأتي على الترتيب $^{-}$أ ، $^{+}$أ وهذا ما يستحسن مراعاته عند تدريس الأعداد الموجهة (وكما تتبعه بعض البرامج الحديثة) .

١ ــ جمع وطرح الأعداد الموجهة :

نراعى أن نهدف من تدريس عملية الجمع ومعكوسها عملية الطرح على الأعداد الموجهة أن نساعد التلميذ أن يصل إلى تكوين القواعد (القوانين) الآتية :

$$\text{أ}^{+} + \text{ب}^{+} = (\text{أ} + \text{ب})^{+}$$

$$\text{أ}^{+} + \text{ب}^{-} = \begin{cases} (\text{أ} - \text{ب})^{+} & \text{عندما أ} > \text{ب} \\ (\text{ب} - \text{أ})^{-} & \text{عندما ب} > \text{أ} \\ \text{صفر} & \text{عندما ب} = \text{أ} \end{cases}$$

$$\text{أ}^{-} + \text{ب}^{-} = \text{أ}^{-} - \text{ب}^{+} = (\text{أ} + \text{ب})^{-}$$

$$\text{أ}^{+} - \text{ب}^{-} = (\text{أ} + \text{ب})^{+}$$

$$\text{أ}^{+} + \text{صفر} = \text{أ}^{+}$$

$$\text{أ}^{-} + \text{صفر} = \text{أ}^{-}$$

وكما ذكرنا هذه القواعد ليست بالسهولة التى نتصورها ، ويمكن أن يلجأ المدرس إلى طرق مختلفة لتكوينها فى ذهن التلميذ منها استخدام خط الأعداد أو طريقة الأنماط أو خواص الحقل أو حتى عن طريق إعطاء معنى ملموس ، وذلك تبعا لمعلومات التلميذ السابقة ومستوى نموه وسنوضح فيما يلى بعضا من هذه الاستراتيجيات .

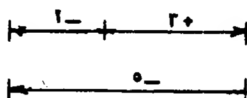
(أ) عن طريق خط الأعداد :

أولا بالنسبة لعملية الجمع : يمكن أن نفسر عملية الجمع على الأعداد الموجهة باستخدام خط الأعداد بطريقة مشابهة لعملية الجمع على الأعداد الموجبة . فمثلا لايجاد ٤ + ٢ على خط الأعداد فاننا نبدأ من الصفر على خط الأعداد ونسير أربع وحدات إلى اليمين (حيث أننا نعتبر السير إلى اليمين هو الاتجاه الذى نعد عليه الأعداد الموجبة) ومن هذه النقطة نسير وحدتين أخرى إلى اليمين ونتيجة هذه العملية فاننا نصل إلى نقطة تبعد ٦ وحدات من الصفر على اليمين منه . وعلى ذلك فاننا نقول أن $^{+}$٤ + $^{+}$٢ = $^{+}$٦ وبنفس الطريقة يمكن ايجاد $^{+}$٣ + $^{-}$٥ . وذلك بأن نبدأ من الصفر ونسير ثلاث وحدات فى اتجاه اليمين ثم من هذه النقطة نسير خمس وحدات إلى اليسار (لأن هذا هو الاتجاه الذى أتفقنا أن نأخذه لعد الأعداد السالبة) نتيجة هذه الحركات هو أن نصل إلى النقطة التى تبعد وحدتين من صفر على يساره . وعلى ذلك نقول أن $^{-}$٣ + $^{-}$٥ = $^{-}$٢ . أنظر شكل (١ ــ أ ، ب) . أى أن جمع عددين موجهين على خط الأعداد يمثل بازاحة الأعداد (باستخدام أسهم كما فى الشكل) حيث يزاح العدد فى الاتجاه الموجب إذا كان موجبا وفى الاتجاه السالب إذا كان سالبا .

ثانيا بالنسبة لعملية الطرح : يمكن تفسير عملية طرح عدد موجه ب من عدد موجه أ ونرمز لذلك أ ــ ب باستخدام خط الأعداد عن طريق الازاحة اللازمة للوصول إلى أ من ب . فمثلا لطرح -٣ من +٥ أى لايجاد +٥ ــ -٣ نوجد الازاحة اللازمة لنصل إلى مكان +٥ من مكان -٣ وهى الازاحة +٨ كما فى شكل (١ ــ حـ) . أما لطرح +٥ من -٣ أى لايجاد -٣ ــ +٥ فاننا نوجد الازاحة اللازمة للوصول إلى مكان -٣ من مكان +٥ وهى الازاحة -٨ كما فى شكل (١ ــ د) .



شكل (١ – أ)



شكل (١ – ب)



شكل (١ – حـ)



شكل (١ – د)

وهذه الطريقة تعتبر مشابهة (وتعميما) لتفسير عملية الطرح على الأعداد الموجبة لطرح ٥ من ٧ أى ٧ـ٥ . ويمكن تفسيره على خط الأعداد بأنها الازاحة اللازمة للوصول إلى مكان ٧ من مكان ٥ وهى الازاحة ٢ . وعلى أية حال يوجد طرق أخرى لتحليل وتفسير عملية الطرح على خط الأعداد وأهمها هى الطريقة التى نقدمها فيما يلى وهى تعتمد مباشرة على تعريف عملية الطرح باعتبارها معكوس لعملية الجمع، وذلك بتفسير معنى عملية طرح ب من أ . كعملية ايجاد العدد الذى إذا أضيف إلى ب ينتج أ . وهذا التفسير يمكن تطبيقه أولا على حالة ما يكون أ، ب أعدادا موجبة ثم يعمم إلى حالة ما يكون أ، ب أعدادا موجهة .

فمثلا يمكن تفسير ٨ـ٥=٣ بأنه باقى طرح ٥ من ٨ هو العدد ٣ وهو العدد الذى إذا أضيف إلى ٥ نتج العدد ٨ .

وعلى ذلك تتحول عملية الطرح إلى عملية الجمع التى يكون قد تعلم التلميذ إجراءها على الأعداد الموجهة . فمثلا لايجاد +١٢، -(⁻٣) نبحث عن العدد الذى إذا أضيف إلى -٣ ينتج +١٢ (وهى التى فسرناها بالطريقة السابقة بأنها الازاحة اللازمة للوصول إلى مكان +١٢ من مكان -٣) . ولايجاد +١٢ ـ(⁻٣) باستخدام خط الأعداد نبدأ عند -٣ ونعد الوحدات حتى نصل إلى ⁺١٢ وهى ⁺١٥ لأن الحركة (الازاحة) فى الاتجاه الموجب .

ونلاحظ أن هذه الطريقة قائمة على تعريف عملية الطرح كمعكوس لعملية الجمع، فكما نعرف تعريف عملية الطرح على الأعداد الطبيعية مثلا . باقى طرح ب من أ هو العدد الطبيعى حـ بحيث أن أ=ب+حـ والطرح ممكن إذا كان أ > ب، أ، ب، حـ أعدادا طبيعية . وعامة باقى طرح العدد ب من أ هو العدد حـ بحيث أن أ=ب+حـ .

وعن طريق تفسير معنى عملية الجمع والطرح على الأعداد الموجهة باستخدام خط الأعداد وعن طريق التدريبات المختلفة يمكن أن يساعد

المدرس التلميذ ان يستنتج القوانين (القواعد) المختلفة الخاصة بجمع وطرح الأعداد الموجهة التى ذكرناها سابقا فمثلا من الأمثلة التى ذكرناها .

+٤ + +٢ ، +٣ + -٥ ، +٥ — -٣ ، -٣ — +٥ يمكن أن نصل إلى +أ + +ب = +(أ+ب) ، +أ + -ب = -(ب—أ) عندما ب > أ ، +أ — -ب = +(أ+ب) ، -أ — +ب = -(أ+ب) على الترتيب .

(ب) عن طريق الأنماط :

يمكن توضيح بعض القواعد المختلفة المذكورة الخاصة بجمع وطرح الأعداد الموجهة واستنتاجها عن طريق الأنماط الرياضية . فمثلا يمكن الوصول إلى +أ — (-ب) = +(أ+ب) عن طريق أنماط مثل النمط التالى :

	+٨	+٨	+٨	+٨	+٨	+٨	+٨	+٨	+٨
بالطرح	+٤	+٣	+٢	+١	٠	-١	-٢	-٣	-٤
	+٤	+٥	+٦	+٧	+٨	+٩	+١٠	+١١	+١٢

حيث يتضح مثلا أن +٨ — (-٣) = +١١

(حـ) عن طريق خواص الحقل والبرهان المنطقى :

يمكن الوصول إلى القوانين السابقة لجمع وطرح الأعداد الموجهة عن طريق برهنة صحتها باستخدام خواص الحقل إذ أن فئة الأعداد الموجهة (وهى الأعداد الحقيقية بصفة عامة) تكون حقل .

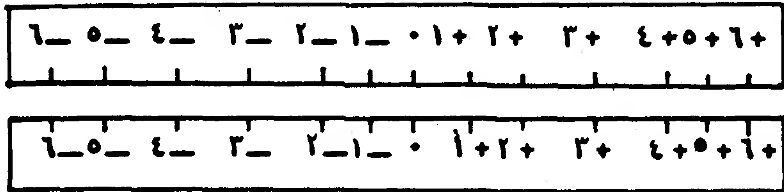
فمثلا يمكن أن نصل إلى أن +أ + (-ب) = +(أ—ب)

عندما أ > ب عن طريق :

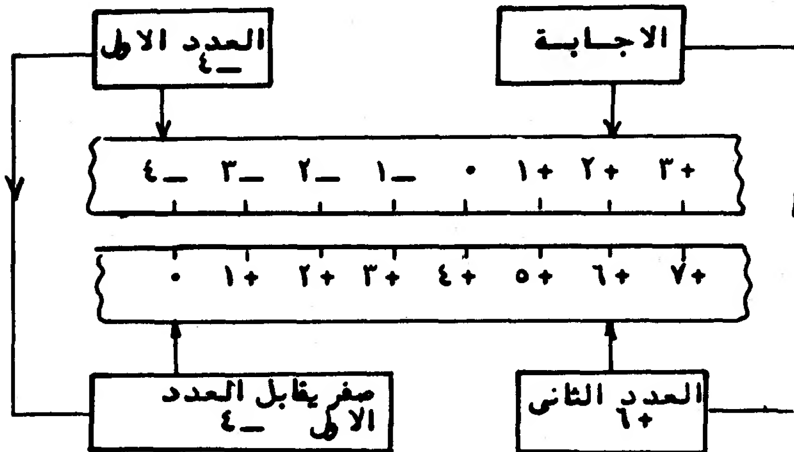
تعريف عملية الطرح ، أ > ب ⟸⟹ يوجد عدد موجب حـ بحيث أن أ = ب + حـ

وفى ختام مناقشتنا لجمع وطرح الأعداد الموجهة نقدم فيما يلى وسيلة إيضاح لمسطرة حاسبة بسيطة لجمع وطرح الأعداد الموجهة.

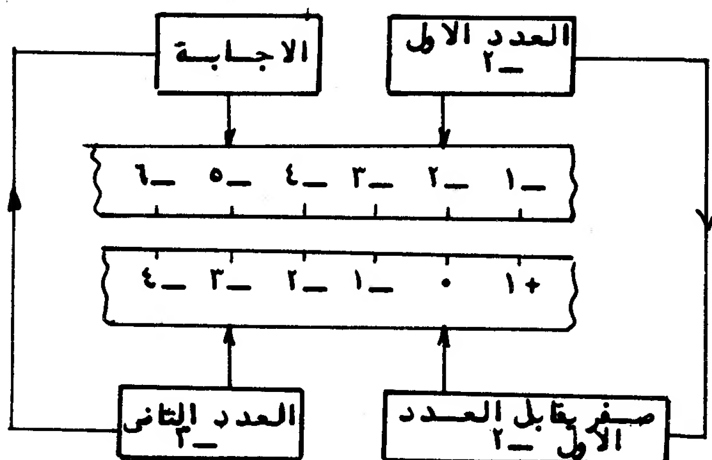
والوسيلة عبارة عن قطعتين مستطيلتين من الخشب أو الكارتون (طول كل منها ٣٠سم تقريبا) لهما نفس التدريج الذى يبعد كل رقم عن الرقم التالى فيها بمقدار ١سم. كما فى شكل (٢) وتتضح طريقة ايجاد مجموع أو باقى طرح عددين موجهين من أشكال (٣ـ أ، ب)، (٤) الآتية :



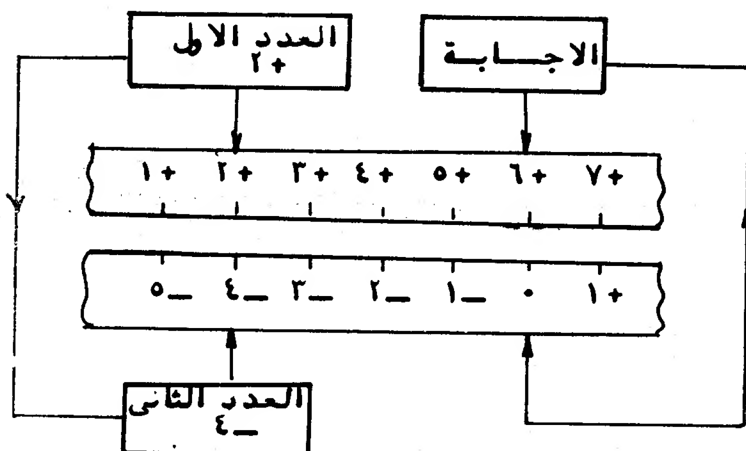
شكل (٢)



شكل (٣ ـ أ) : ($\overline{٤} + \overset{+}{٦} = \overset{+}{٢}$)



شكل (٣ ـ ب) : (٢⁻+٣⁻=٥⁻)



شكل (٤) : (+٢ـ−٤=+٦)

فمثلا لايجاد مجموع عددين موجهين و كن ٤⁻ + ٦⁺ نضع صفر التدريج الأسفل تحت العدد الأول ٤⁻ ثم نقرأ العدد فى التدريج الأعلى الذى يقابل +٦ فى التدريج الأسفل فيكون هو ناتج جمع ٤⁻+٦⁺. أنظر شكل (٣ـأ). أما لايجاد طرح عددين كزجهين وليكن ٢⁺ـ٤⁻ نضع العدد الثانى -٤ فى التدريج الأسفل تحت العدد الأول +٢ فى التدريج الأعلى. ثم نقرأ العدد فى التدريج الأعلى الذى يقابل صفر التدريج الأسفل فيكون هو ناتج الطرح.. أنظر شكل (٤)

٢ ـ ضرب وقسمة الأعداد الموجهة :

نراعي أن نهدف من تدريس عملية الضرب والقسمة على الأعداد الموجهة أن نساعد التلميذ أن يصل إلى تكوين القواعد (القوانين) التالية :

$$^{+}\text{أ} \times {}^{-}\text{ب} = {}^{-}(\text{أب})$$

$$^{-}\text{أ} \times {}^{-}\text{ب} = {}^{+}(\text{أب})$$

$$^{+}\text{أ}({}^{+}\text{ب} + {}^{+}\text{حـ}) = {}^{+}(\text{أب} + \text{أحـ})$$

$$^{+}\text{أ}({}^{+}\text{ب} + {}^{-}\text{حـ}) = {}^{-}(\text{أحـ} - \text{أب}) \quad \text{حيث ب} < \text{حـ}$$

$$\frac{^{+}\text{أ}}{^{+}\text{ب}} = {}^{+}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$$

$$\frac{^{+}\text{أ}}{^{-}\text{ب}} = \frac{^{-}\text{أ}}{^{+}\text{ب}} = {}^{-}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$$

$$\frac{^{-}\text{أ}}{^{-}\text{ب}} = {}^{+}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$$

ويمكن أن يلجأ المدرس إلى استراتيجيات مختلفة لتكوين مثل هذه القوانين فى ذهن التلميذ كما سبق أن بينا فى حالة القوانين الخاصة بجمع وطرح الأعداد الموجهة . وسنقدم فيما يلى بعضا من هذه الاستراتيجيات ثم نتبعها برسم تخطيطى يوضح أن فهم عدد (كمية) سالب × عدد سالب = عدد موجب يكون فى مستويات مختلفة ، وهذا ما أشرنا إليه فى الباب الأول عند مناقشتنا لهدف تدريس الرياضيات الخاص بفهم أساسيات المادة .

(أ) عن طريق خط الأعداد :

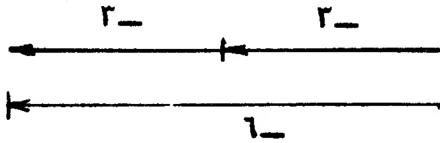
أولا بالنسبة لعملية الضرب : يمكن أن نفسر عملية الضرب على الأعداد الموجهة باستخدام خط الأعداد عن طريق الضرب فى كميات قياسية . فمثلا يمكن إعطاء معنى ضرب عدد موجه فى كمية قياسية $^{+}\text{أ}$ بأنه تكبير أو تصغير بمعامل أ تبع ما إذا كانت $^{+}\text{أ} > 1$ أو $^{+}\text{أ} < 1$ ، أما الضرب فى $^{-}\text{أ}$ فيعنى التكبير أو التصغير بالمعامل أ مع تغيير الاتجاه .

فاذا كان التلميذ يألف ضرب الأعداد الموجبة بهذا الأسلوب فيمكن ببساطة تعميم الطريقة لتشمل الأعداد الموجهة.

فمثلا لايجاد حاصل الضرب -٣ × +٢ يمكن إعتبار +٢ كمية قياسية وبذلك فناتج الضرب يأتي من تكبير +٣ بالمعامل ٢ فى نفس اتجاه -٣ كما فى شكل (ه ـ أ) أو يمكن ايجاد حاصل الضرب باعتبار -٣ كمية قياسية وبذلك فناتج الضرب يأتى من تكبير +٢ بالمعامل ٣ فى عكس اتجاه +٢ كما فى شكل (ه ـ ب).



شكل (ه ـ أ)



شكل (ه ـ ب)

وقد يلجأ البعض إلى اعتبار عملية الضرب على الأعداد الموجهة كعملية جمع متكرر إلا أن ذلك ليس مستحبا. وذلك لأنه إذا كان ذلك له معنى فى حالة ما تكون الأعداد الموجهة المستخدمة هى أعدادا صحيحة فانه لا يكون لها معنى إذا كانت الأعداد الموجهة المستخدمة هى أعدادا قياسيا.

فمثلا +٢ × +٣ يمكن وضعها على صورة ±٢ + ±٢ + +٢ أو +٣ + +٣ ولكن +١/٢ × +٥/٨ لا يمكن وضعها على صورة جمع متكرر.

وبتفسير عملية الضرب على الأعداد الموجهة يمكن مساعدة التلميذ للوصول إلى القوانين المذكورة الخاصة بهذه العملية.

(ب) عن طريق الأنماط:

يمكن أيضا باستخدام الأنماط الوصول إلى بعض القوانين الخاصة

بعملية الضرب على الأعداد الموجهة. فمثلا يمكن الوصول إلى $^{+}$أ × $^{-}$ب = $^{-}$(أب) عن طريق أنماط مثل النمط التالى:

فمثلا يتضح من هذا النمط أن $^{+}$٥ × $^{-}$٢ = $^{-}$١٠

$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	$^{+}$٥	
$^{-}$٣	$^{-}$٢	$^{-}$١	٠	$^{+}$١	$^{+}$٢	$^{+}$٣	$^{+}$٤	$^{+}$٥	بالضرب
$^{-}$١٥	$^{-}$١٠	$^{-}$٥	٠	$^{+}$٥	$^{+}$١٠	$^{+}$١٥	$^{+}$٢٠	$^{+}$٢٥	

وباستخدام القانون السابق $^{+}$أ × $^{-}$ب = $^{-}$(أب) يمكن الوصول إلى $^{-}$أ × $^{-}$ب = $^{+}$(أب) عن طريق أنماط مثل النمط التالى:

فمثلا يتضح من هذا النمط أن $^{-}$٥ × $^{-}$٢ = $^{+}$١٠

$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	$^{-}$٥	
$^{-}$٣	$^{-}$٢	$^{-}$١	٠	$^{+}$١	$^{+}$٢	$^{+}$٣	$^{+}$٤	$^{+}$٥	بالضرب
$^{+}$١٥	$^{+}$١٠	$^{+}$٥		$^{-}$٥	$^{-}$١٠	$^{-}$١٥	$^{-}$٢٠	$^{-}$٢٥	

(حـ) عن طريق خواص الحقل والبرهان المنطقى:

يمكن الوصول إلى القوانين الخاصة بضرب الأعداد الموجهة عن طريق برهنة صحتها باستخدام خواص الحقل.

فمثلا إثبات $^{+}$أ × $^{-}$ب = $^{-}$(أب) يأتى من:

$^{+}$أ(صفر) = صفر   خاصية الصفر

$^{+}$أ($^{+}$ب + $^{-}$ب) = صفر

$^{+}$(أب) + $^{+}$أ × $^{-}$ب = صفر   خاصية التوزيع

وعلى ذلك لابد أن يكون $^{+}$أ × $^{-}$ب هو المعكوس الجمعى للعدد $^{+}$(أب)

ومن ثم فان $^{+}$أ × $^{-}$ب = $^{-}$(أب)

كذلك إثبات أن $^{-}$أ × $^{-}$ب = $^{+}$(أب) يأتى من:

-أ(صفر) = صفر   خاصية الصفر

-أ(+ب + -ب) = صفر

-(أب) + -أ × -ب = صفر باستخدام خاصية التوزيع والابدال والقانون السابق الذى يقول +أ × -ب = -(أب)

وعلى ذلك لابد أن يكون -أ × -ب هو المعكوس الجمعي للعدد -(أب)

ومن ثم فان -أ × -ب = +(أب)

وكذلك +أ(+ب + -حـ) = -(أحـ - أب) حيث ب < حـ

يأتى من :

ب < حـ ⟸ +ب + -حـ = -(حـ - ب) من قانون الجمع على الأعداد الموجهة.

وعلى ذلك فان +أ(+ب + -حـ) = +أ × -(حـ - ب)

= -[(حـ - ب) × +أ]

= -(أحـ - أب)

ثانيا بالنسبة لعملية القسمة : بأخذ عملية القسمة كعملية معكوسة لعملية الضرب يمكن الوصول إلى القوانين الخاصة بقسمة الأعداد الموجهة المذكورة عن طريق أى من الاستراتيجيات (الطرق) السابقة الخاصة بعملية الضرب.

فمثلا من تعريف عملية القسمة يكون قسمة العدد أ على العدد ب هو العدد حـ بحيث أن ب حـ = أ. وعلى ذلك باعتبار -أ = +ب × حـ يمكن تعريف حـ بأنه العدد الذى إذا ضرب فى +ب ينتج -أ فمثلا العدد الذى يضرب فى +٣ لينتج -٦ هو -٣ و يكتب ذلك -٦ ÷ +٣ = -٣ أو +٣ × حـ = -٦ أو -٦/+٣ = -٢

ومن ثم فانه يمكن الوصول إلى قوانين مثل -أ/ب = +[أ/ب]

+أ/-ب = -أ/+ب = -[أ/ب] ،

ويلاحظ انه يوجد استراتيجيات اخرى بسيطة لتوضيح وتفسير العمليات الأساسية على الأعداد الموجهة والقوانين (القواعد) الخاصة بها. ومن بينها إعطاء معنى ملموس للأعداد الموجبة والسالبة كالمكسب والخسارة أو السفر إلى الشرق وإلى الغرب أو ملء وتفريغ حوض ماء.

فمثلا إذا اعتبرنا اتجاه السفر نحو الشرق موجبا ونحو الغرب سالبا واعتبرنا الزمن الآتى (المستقبل) موجبا والزمن السابق (الماضى) سالبا، واعتبرنا وضع النقطة موجبا إذا كانت شرق مكان ما أ ووضع النقطة سالبا إذا كانت غرب هذا المكان، فاننا يمكن تفسير التعبير $^{+}٥٠ \times {}^{+}٣٠ = {}^{+}١٥٠$ بأن شخص يسافر بسرعة ٥٠ كم/ ساعة فى اتجاه الشرق بعد ثلاث ساعات يصل إلى نقطة تبعد مسافة ١٥٠ كم من النقطة أ شرقا. أما التعبير $^{-}٥٠ \times {}^{-}٣ = {}^{+}١٥٠$ فيعنى أن شخص يسافر بسرعة ٥٠ كم/ ساعة نحو الغرب كان على بعد ١٥٠ كم من نقطة أ منذ ثلاث ساعات.

وعموما كما ذكرنا تتوقف الاستراتيجية أو الطرق التى يستخدمها المدرس لتكوين القوانين (القواعد) المختلفة السابقة فى ذهن التلميذ على مستوى التلميذ ومعلوماته السابقة.

ولكى نوضح أن فهم التلميذ للمفاهيم والقواعد المختلفة أى تكوينها فى ذهنه تعبير نسبى له مستويات مختلفة ويعتمد على تكوين وفهم مفاهيم أولية وأساسية له نقدم شكل (٦) الذى يوضح المفاهيم الأولية والأساسية لقانون (قاعدة) ضرب الأعداد السالبة.

ونلاحظ أنه عندما يتمكن التلميذ من القوانين الخاصة بالعمليات على الأعداد الموجهة يمكن أن يستخدم للأعداد الموجهة $^{+}$أ الرمز أ، $^{-}$أ الرمز ـــ أ.



شكل (٦)

٢.١.٤ ـ التعبيرات والقواعد الجبرية Algebraic formulae ـ بعض الوسائل فى تدريس الجبر:

نقدم فيما يلى فكرة عن كيفية تقديم التعبيرات الجبرية للتلميذ المبتدىء عن طريق التمهيد لها من المعلومات الحسابية أو عن طريق استخدام بعض وسائل إيضاح مناسبة. وتتضمن التعبيرات الجبرية التى نتكلم عنها تكوين جمل أو تقارير رياضية برموز جبرية، وتكوين القوانين أو القواعد الجبرية الخاصة ببعض المتطابقات الأساسية فى الجبر كتلك الخاصة بفك الأقواس والتحليل.

ثم نتبع ذلك مناقشة أهمية استخدام الوسائل فى تكوين التعبيرات الجبرية وتجنب الأخطاء الشائعة فى الجبر.

١ ـ تكوين جمل أو تقارير رياضية باستخدام الرموز (الجبرية) :

يألف تلميذ الاعدادى التعبيرات الجبرية مثل م=ط نق^{٢} ، مساحة المثلث=$\frac{١}{٢}$ل ع ، حـ=م ر. وهذه يمكن أن تمهده للتمكن من الرموز الجبرية ومفاهيمها . و يستطيع المدرس أن يساعد التلميذ المبتدىء على تكوين الجمل الرياضية باستخدام الرموز عن طريق مساعدته على تكوين العلاقات الجبرية التى تربط بين الكميات المختلفة .

فمثلا بأخذ ثمن ١ كيلو من الجبن ٥٠ قرش
، ثمن ٢ كيلو من الجبن ٢ × ٥٠ قرش
، ثمن ٣ كيلو من الجبن ٣ × ٥٠ قرش

يمكن أن يصل التلميذ إلى أن

ثمن الجبن بالقروش = ٥٠ × عدد الكيلوجرامات

و بوضع س لتحل محل عدد الكيلوجرامات ، ص لتحل محل الثمن بالقروش يستطيع التلميذ أن يلخص النتيجة السابقة بكتابة العلاقة الجبرية

ص = ٥٠ س .

وعن طريقة الأمثلة المختلفة فى الحساب أو مشاهدات التجارب يمكن أن نساعد التلميذ على ترجمة القوانين المختلفة والعلاقات التى تربط بين الظواهر المختلفة إلى تعبيرات جبرية .

٢ ـ تكوين القواعد أو القوانين الجبرية :

نراعى عند تقديم القواعد أو القوانين الجبرية الخاصة ببعض المتطابقات الأساسية فى الجبر أن نوضح خواص العمليات المستخدمة . ويمكن الاستعانة بالخواص المناظرة فى الحساب أو استخدام أشكال هندسية ملموسة توضح مثل هذه الخواص للتلميذ المبتدىء كما نبين فيما يلى بعض المتطلبقات .

مثال (١) : أ(ب+حـ)=أب+أحـ

يمكن توضيح هذه القاعدة وهى ما تسمى خاصية التوزيع والتى نستعملها فى فك الأقواس عن طريق استنتاجها من النمط :

١٧
× ١٣
———
٥١
١٧
———
٢٢١

وهو يمثل ١٧ × ١٣ = ١٧ (٣ + ١٠)
= ١٧ × ٣ + ١٧ × ١٠
= ٥١ + ١٧٠ = ٢٢١

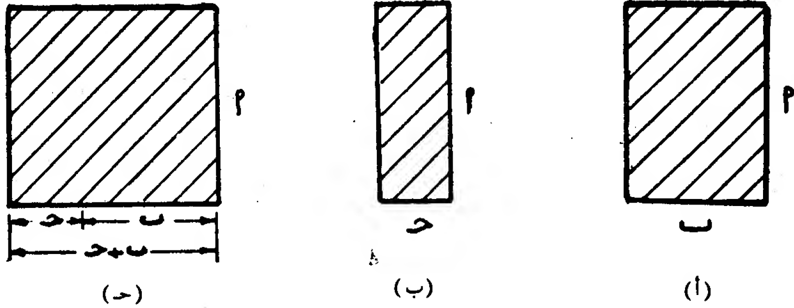
ويمكن أن نتدرج فى أمثلة مثل
١٧ (ب + ٣) = ١٧ ب + ٥١ ، ١٧ (ب + حـ) = ١٧ ب + ١٧ حـ
حتى نصل إلى أ (ب + حـ) = أ ب + أ حـ

ويمكن استخدام الأشكال الهندسية فى وصف مثل هذه التقارير الجبرية .

فمثلا شكل (٧ ــ أ ، ب ، حـ) يوضح الشكل الهندسى فيها المقادير
أ ب ، أ حـ ، أ ب + أ حـ على الترتيب

ومن المتطابقة السابقة كما استنتجنا خاصية التوزيع والتى نستخدمها فى فك الأقواس من نظيرتها فى الحساب فانه يمكن استنتاج العملية العكسية لها والتى نستخدمها فى التحليل أيضا من نظيرتها فى الحساب .

فمثلا يمكن استنتاج أن أ ب + أ حـ = أ (ب + حـ)
عن طريق ٥ × ١٠ + ٥ × ٢ = ٥ (١٠ + ٢) = ٦٠



شكل (٧)

مثال (٢) : (أ ــ ب) (أ + ب) = أ^{٢} ــ ب^{٢}

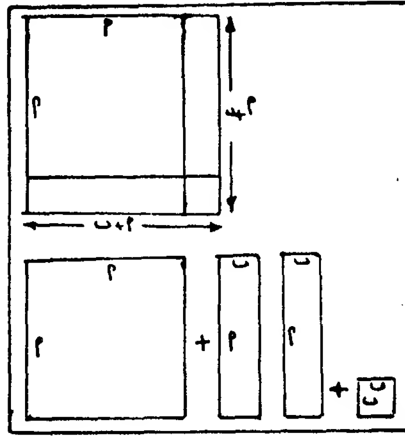
يمكن مساعدة التلميذ للوصول إلى هذه القاعدة عن طريق استخدام خاصية الابدال، والدمج، والتوزيع. وهذه الخواص يمكن الوصول إليها مسبقا عن طريق نظيرتها فى الحساب كما سبق أن بينا.

فمثلا (أ ــ ب) (أ + ب) = أ^{٢} ــ ب^{٢} تأتى من :
(أ ــ ب) (أ + ب) = (أ ــ ب) أ + (أ ــ ب) ب باستخدام خاصية التوزيع
= أ (أ ــ ب) + ب (أ ــ ب) باستخدام خاصية الابدال
= أ^{٢} ــ أ ب + ب أ ــ ب^{٢} باستخدام خاصية التوزيع
= أ^{٢} ــ أ ب + أ ب ــ ب٢ باستخدام خاصية الابدال (أ ب = ب أ)
= أ^{٢} ــ ب^{٢} باستخدام خاصية المعكوس الجمعى (- أ ب + أ ب = صفر)

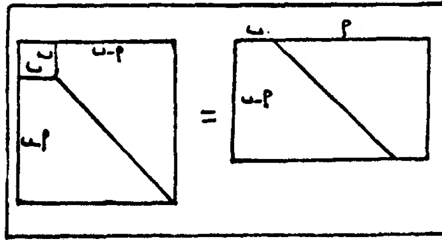
ويمكن الاستعانة بشكل هندسى (وسيلة إيضاح) لتحقيق وتوضيح القاعدة كما فى شكل (٨ ــ أ).

وبالمثل يمكن الوصول إلى : (أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

وعن طريق الخواص المذكورة أو بالاستعانة بالأشكال الهندسية المناسبة أنظر شكل (٨ ــ ب)..



شكل ٨ (أ)



شكل ٨ (ب)

مثال (٣) : بالنسبة للقواعد الخاصة بتحليل المقدار الثلاثى :

يمكن استنتاج هذه القواعد عن طريق العملية العكسية وهى ايجاد (بفك الأقواس) حاصل ضرب مقدارين جبريين كل منهما يحتوى على حدين مثل

(س + ٤) (س + ٣) = س^{٢} + ٤ س + ٣ س + ١٢

= س^{٢} + ٧ س + ١٢

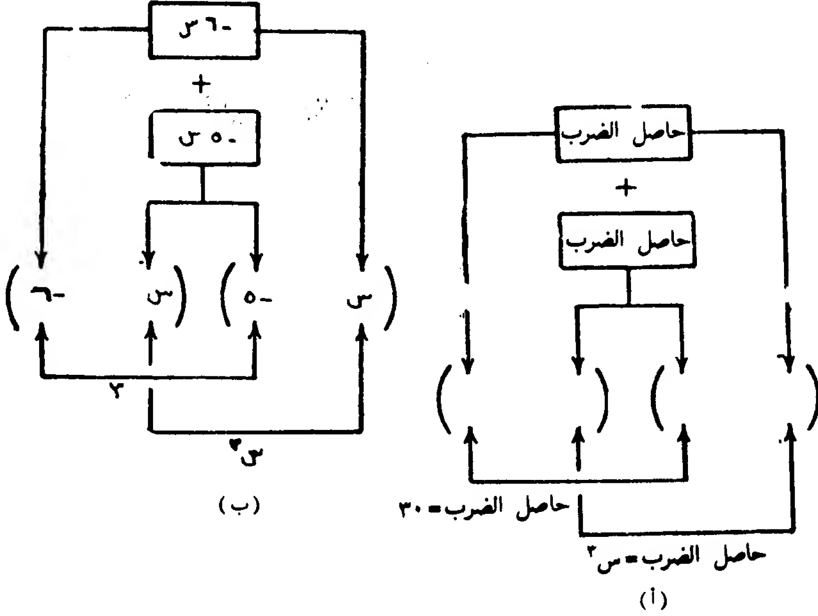
أو (س + ٣) (س — ٤) = س^{٢} — س — ١٢

أو (س — ٣) (س — ٤) = س^{٢} — ٧ س + ١٢

ويمكن الاستعانة برسم تخطيطى يبين طريقة (قاعدة) التحليل حيث يستطيع التلميذ خلالها اكتساب المهارة على التحليل . و يوضح شكل (٩ — أ ، ب) مثل هذا الرسم التخطيطى لتحليل المقدار الثلاثى س^{٢} — ١١ س + ٣٠

كما يمكن أيضا استخدام الطرق الأخرى المألوفة مثل طريقة المقص وغيرها لنساعد التلميذ على اكتساب المهارة فى تحليل المقدار الثلاثى.

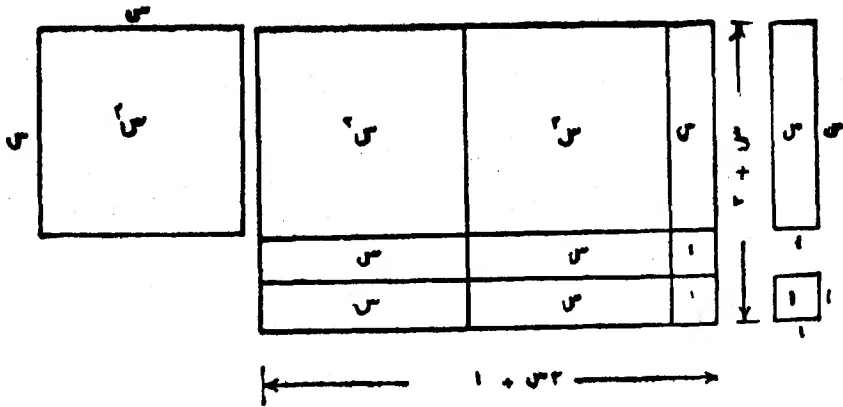
مجموع حاصلى الضرب = –١١ س



شكل (٩)

ويمكن الاستعانة بوسائل هندسية لتوضيح تحليل مقدار ثلاثى فى بعض الأحيان. فمثلا يمكن الاستعانة بالوسيلة الآتية لتوضيح أن ٢ س^{٢} + ٥ س + ٢ = (س + ٢) (٢ س + ١).

والفكرة فى الوسيلة هى تكوين مستطيل يكافىء مساحة المربعين س^{٢}، س^{٢} والمستطيلين ٥ س، ٢ × ١ على أن يراعى عند اختيار الوحدات التى تمثل س، ١ ألا تكون أحدهما مضاعف للآخر أى لا تكون س ممثلة بطول ٣ سم، ١ ممثل بطول ١ سم. أنظر شكل (١٠) هذه الوسيلة.



(شكل ١٠)

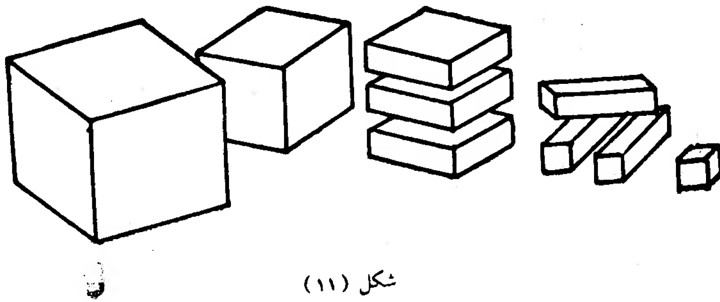
٣ ـ استخدام الوسائل فى تكوين التعبيرات الجبرية:

أشرنا فيما سبق إلى بعض الوسائل لتوضيح القواعد والمتطابقات الجبرية المختلفة. والواقع أنه يمكن استخدام مثل هذه الوسائل (أو ما نسميها بالأجهزة) ليس فقط لتوضيح أو تحقيق مثل هذه القواعد أو المتطابقات الجبرية ولكن فى تكوينها فى ذهن الطالب أو اكتشافها باستخدام الطرق التى تساعد على اكتشاف القواعد والمفاهيم المختلفة. فمثلا عن طريق أى من الوسائل السابقة أو عن طريق وسائل بسيطة مثل قضبان (عصيان) تمثل كل منها س، مربعات تمثل كل منها س^{٢} أو مستطيلات تمثل كل منها س ص يمكن أن نتيح الفرصة للتلميذ لأن يستنتج بنفسه خاصية الابدال والتنسيق والتوزيع والتحليل والمتطابقات المختلفة. ولا يقف دور مثل هذه الوسائل على تكوين أو توضيح القواعد أو المفاهيم الجبرية الأساسية ولكن على معالجة الأخطاء الشائعة فى الجبر التى يقع فيها التلميذ نتيجة لعدم فهم المفاهيم لأولية. فمثلا استخدام الوسائل التى تمثل س^{٢}، س، س ص يمكن أن نوضح للتلميذ الفرق بين ٢ س، س^{٢} وبين ٣س+س، ٣س×س وأن س+س^{٢} ≠ ٢ س^{٢}. وهكذا.

وعموما نراعى عند استخدام الوسائل الخاصة بتكوين التعبيرات الجبرية فى ذهن التلميذ أن نوضح خواص الابدال، الدمج، التوزيع المتضمنة فى توضيح أو استنباط القواعد والمتطابقات المختلفة.

وعلاوة على الوسائل التى ذكرناها فى هذا الصدد سنقدم الوسائل الآتية وطريقة عملها.

الوسيلة الأولى: وهى خاصة بتوضيح أو تكوين القاعدة الجبرية $(أ+ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$. ويمكن عمل هذه الوسيلة من نماذج من البلاستيك أو الخشب أو الورق المقوى لمجسمات تمثل مكعبات $أ^{٣}$، $ب^{٣}$، متوازيات مستطيلات $أب^{٢}$، $أ^{٢}ب$. وصندوق فارغ على شكل مكعب طول ضلعه أ+ب، ويملء الصندوق من المجسمات تتضح القاعدة المذكورة (أنظر شكل ١١).

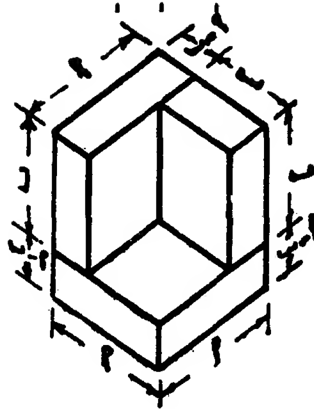


شكل (١١)

الوسيلة الثانية: وهى خاصة بتكوين أو توضيح القاعدة:

$$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٣})$$

ويمكن عمل الوسيلة من صندوق (فارغ) على شكل مكعب طول ضلعه أ ومجسمات من الخشب أو البلاستيك على شكل مكعب طول ضلعه ب ومتوازيات مستطيلات سمك كل منها أ ـ ب ومساحة قاعدة كل منها على الترتيب $أ^{٢}$، أب، $ب^{٢}$. بأخذ الصندوق ووضع المكعب $ب^{٣}$ فيه فان الجزء الباقى من الصندوق هو $أ^{٣} - ب^{٣}$ وبملئه بالمجسمات تتضح القاعدة المذكورة. وتكون الوسيلة مناسبة بأخذ ب = ٤ سم، أ = ٦ سم. أنظر شكل (١٢) الذى يوضح الجزء الباقى $أ^{٣} - ب^{٣}$.



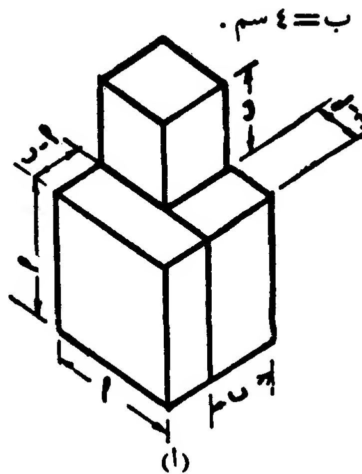
شكل (١٢)

الوسيلة الثالثة: وهى خاصة بالقاعدة:

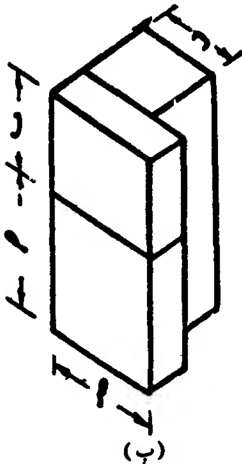
أ٣ + ب٣ = (أ + ب) (أ٢ ــ أ ب + ب٢)

وتتكون الوسيلة من ثلاثة متوازيات مستطيلات أبعاد الأول (أ + ب)، ب، ب والثانى أ، أ، (أ ــ ب) والثالث أ، ب، (أ ــ ب) وعند ترتيبهم كما فى شكل (١٣ ــ أ) فاننا نمثل أ٣ + ب٣ وعند ترتيبهم بوضع القطعة الأصغر فى مكان آخر كما فى شكل (١٣ ــ ب) نحصل على منشور ارتفاعه أ + ب ومقطعه عبارة عن مربع طول ضلعه ب بالاضافة إلى مستطيل مساحته أ (أ ــ ب) وعلى ذلك فان أ٣ + ب٣ = (أ + ب) [أ (أ ــ ب) + ب٢] =

(أ + ب) (أ٢ ــ أ ب + ب٢). وتكون الوسيلة مناسبة بأخذ أ = ٦ سم، ب = ٤ سم.



(أ)



(ب)

شكل (١٣)

٣.١.٤ ــ الكسور الجبرية :

يتناول موضوع الكسور الجبرية فى المرحلة الاعدادية دراسة العمليات الأساسية عليها مثل التبسيط، الضرب والقسمة، الجمع والطرح. وسهولة إجراء مثل هذه العمليات على الكسور الحسابية بالنسبة للتلميذ لاتعنى سهولة إجرائها على الكسور الحسابية بالنسبة له، بل العكس يوجد أخطاء شائعة فى معالجة الكسور الجبرية يقع فيها بعض التلاميذ. وهذه الأخطاء ناتجة عن عدم فهم بعض المفاهيم الأولية اللازمة مثل فهم معنى الكسر الجبرى أو العملية ومعكوسها أو قوانين الحذف.

ولذلك يراعى عند تقديم الكسور الجبرية والعمليات عليها العناية بفهم تركيب الكسر وخواص القواعد والعمليات المختلفة. وكذلك يستحسن التمهيد للعمليات المختلفة بالعمليات المناظرة فى الأعداد القياسية أو مما يعرفه التلميذ المبتدىء (أى فى المراحل المبكرة) عن الكسور الحسابية.

وفيما يلى نقدم فكرة عن تقديم الكسور الجبرية والعمليات الأساسية عليها مع التعرض إلى بعض الأخطاء الشائعة وكيفية تجنبها.

١ ــ الكسر الجبرى، ضرب وقسمة الكسور الجبرية :

من المهم أن يعرف التلميذ (المبتدىء) أن الكسر الجبرى إذا لم يكن يعبر عن مجرد نسبة يعبر عن قسمة كمية (البسط) على كمية أخرى (المقام) سواءا كان من الممكن إجراء القسمة أم لا

ولذا فانه يعتبر $\frac{أ}{ب}$ أو $\frac{س-٣}{٢ص}$ كسور كاعتباره للكسور $\frac{٣}{٤}$ أو $\frac{٨}{١٥}$

وعلى ذلك فاننا قد نسمى الكسور الجبرية تعبيرات قياسية حيث يمكن معالجتها بنفس العمليات على الأعداد القياسية. فمثلا عملية تبسيط الكسر تأتى من قانون الحذف على الأعداد القياسية وهو $\frac{ن أ}{ن ب} = \frac{أ}{ب}$

(حيث ن $\neq$ صفر) ومن قوانين الأعداد القياسية الأخرى $\frac{ن}{ن} = ١$

(حيث ن $\neq$ صفر)، $\frac{ن}{١} = ن$ ، ن × $\frac{أ}{ب} = \frac{ن أ}{ب}$

وعامة قد يكون من المناسب أن يوضح المدرس معنى الكسر الجبرى عن طريق نظيره فى الحساب فمثلا $\frac{٧}{٨}$ تعنى ٧ أجزاء من ٨ أجزاء، أو تعنى ٧ أمثال وحدة هى الثمن أى $٧ \times \frac{١}{٨}$ أو تعنى ٧ ÷ ٨ أو تعنى ٧ : ٨، أو تعنى الثنائى المرتب (٧، ٨)، أو تعنى العدد القياسى $\frac{٧}{٨}$.

ويلاحظ أن بعض الأخطاء الشائعة فى تبسيط الكسور مثل $\frac{س + ٤}{٤} = س$

أو $\frac{٢ن + أ}{-٣ن + أ} = \frac{٢}{-٣}$ أو $\frac{س^٢ - ٤س}{٣ - س^٢ - ٤س} = \frac{١}{٣}$ تنشأ من

عدم فهم قانون الحذف وأن الضرب والقسمة عمليتان معكوسيتان وعنصرهما المحايد ١. وعلى ذلك من المهم أن يفهم التلميذ أنه فى قانون الحذف $\frac{ن أ}{ن ب} = \frac{أ}{ب}$ تكون ن عامل فى البسط والمقام وكذلك يفهم أن الجمع والقسمة عمليتان غير معكوستين وعلى ذلك لا يمكن أن نحذف ٤ مع ٤ أو أ مع أ أو -٤س مع -٤س فى الأمثلة السابقة. ولكن فى المثال الأخير يلاحظ أن س عامل للبسط والمقام.

وعلى ذلك يكون $\frac{س^٢ - ٤س}{٣س^٢ - ٤س} = \frac{س (س-٤)}{س (٣-٤)} = \frac{س - ٤}{٣س - ٤}$

وقد يكون من المناسب فى بعض الأحيان توضيح العمليات المتضمنة حتى لا يحدث إلتباس فمثلا :

$\frac{(٢ن + ٣) + ٥}{(ن + ٢) + ٥}$ تعنى [(٢ن+٣) + ٥] ÷ [(ن+٢)+٥]

ومن ثم يعرف التلميذ أنه يجرى عملية الجمع أولا ثم عملية القسمة.

وبالنسبة لتقديم عملية الضرب والقسمة على الكسور الجبرية يمكن استخدام عملية الضرب على الأعداد القياسية وخواصها. وأخذ القسمة كعملية معكوسة لعملية الضرب. وعملية الضرب على الأعداد القياسية:

$\frac{أ}{ب} \times \frac{حـ}{ء} = \frac{أحـ}{بء}$ (حيث ب ء $\neq$ صفر) عملية إبدالية ومنسقة على

فئة الأعداد القياسية. ومن ثم يعرف التلميذ أن حاصل ضرب كسور جبرية هو كسر جبرى واحد بسطه حاصل ضرب البسوط ومقامه حاصل ضرب المقامات للكسور المعطاه.

وقد لا توجد صعوبة للتلميذ فى ضرب الكسور الجبرية ولكن قد نجد بعض الصعوبة فى قسمة كسر جبرى على كسر جبرى ناتجة من عدم معنى القسمة كعملية معكوسة للضرب عنصرها المحايد ١ أو فهم خاصية الحذف.

وقد يعرف معظم التلاميذ قاعدة (قانون) قسمة كسر على كسر وهى ضرب الكسر الأول فى مقلوب الكسر الثانى دون أن يعرفوا الأساس فى ذلك. وعدم فهم هذا الأساس قد يعرض بعض التلاميذ إلى خطأ قلب الكسر الأول من الكسر الثانى. ولذا يجب العناية بفهم مثل هذه القواعد عن طريق فهم مفاهيمها الأولية (كما ذكرنا فى الباب الأول). ويمكن الاستعانة بالقوانين المناظرة فى الأعداد القياسية. فمثلا يمكن اشتقاق هذه القاعدة من خواص الأعداد القياسية كما يأتى:

$$\frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{حـ}{ء}} = \frac{ن \times \frac{أ}{ب}}{ن \times \frac{حـ}{ء}}$$

بوضع $ن = \frac{ء}{حـ}$ فإن

$$\frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{حـ}}{\text{ء}}} = \frac{\frac{\text{ء}}{\text{حـ}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}}{\frac{\text{ء}}{\text{حـ}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}} = \frac{\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ء}}{\text{حـ}}}{١} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ء}}{\text{حـ}}$$

وهنا أخذنا فى الاعتبار استخدام قانون الحذف وأن الضرب والقسمة عمليتان معكوستان ، «١» هو العنصر المحايد للضرب والقسمة .

جمع وطرح الكسور الجبرية :

يمكن أيضا الاستعانة بجمع وطرح الأعداد القياسية فى تقديم جمع وطرح الكسور الجبرية . فمثلا يمكن جمع الكسور الجبرية عن طريق تعريف عملية الجمع على الأعداد القياسية ، أى :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{أء} + \text{ب حـ}}{\text{ب ء}} \qquad (\text{حيث ب ء} \neq \text{صفر}) \quad (١)$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{حـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + \text{حـ}}{\text{ب}} \qquad (\text{حيث ب} \neq \text{صفر}) \quad (٢)$$

وبتقديم جمع الكسور الجبرية بهذه الطريقة يمكن تجنب بعض الأخطاء الشائعة مثل :

$$\frac{٥\text{س}}{\text{أ}} + \frac{٢}{\text{ن}} = \frac{٥\text{س} + ٢}{\text{أ} + \text{ن}} \quad \text{أو} \quad \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٣ + ١}{٤ + ٤}$$

$= \frac{٤}{٨}$ الناشئة من عدم فهم عملية الجمع وطبيعة الكسر.

ولما كان قانون الجمع على الأعداد القياسية يكافىء قاعدة ايجاد المقام المشترك ب ء للكسرين فى قانون الجمع (١) فانه يمكن التمهيد لجمع الكسور الجبرية بطريقة أخرى عن طريق جمع الحدود المتشابهة

للكسور الحسابية وفهم معنى الكسر بأن نأخذ المقام كأنه نوع الشىء المأخوذ ونأخذ البسط كأنه الكمية المأخوذة من هذا النوع .

فمثلا يمكن إعتبار $\frac{٣}{٧} = \frac{١}{٧} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٧} = ٣ \times \frac{١}{٧}$

أى اعتبار $\frac{٣}{٧}$ هـ ٣ من وحدة كسور ما $\frac{١}{٧}$ مثلها مثل ٣س

وعلى ذلك يكون ٣س + س $= ٣ \times \frac{١}{٧} + \frac{١}{٧}$

$$= (٣+١) \times \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧}$$

ثم يعمم جمع كسور متحدة المقامات إلى جمع كسور غير متحدة المقامات عن طريق جمع الحدود المتشابهة والتى تكون مقامها واحدة وهذا المقام يكون هو المضاعف المشترك الأدنى للمقامات المختلفة .

وبذلك يمكن تحويل كل كسر إلى كسر مكافىء له مقامه هو المقام الموحد ثم تجرى عملية الجمع على هذه الكسور ذات المقام الواحد باعتبارها حدودا متشابهة بالمعنى الذى بيناه ويمكن توضيح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال (١) :

$$\frac{٧}{١٢} + \frac{١١}{٥٦} = \frac{٧}{٢ \times ٢ \times ٣} + \frac{١١}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٧}$$

$$= \frac{٧}{٢ \times ٢ \times ٣} \times \frac{٢ \times ٧}{٢ \times ٧} + \frac{١١}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٧} \times \frac{٣}{٣}$$

$$= \frac{٧ \times ٢ \times ٧}{١٦٨} + \frac{١١ \times ٣}{١٦٨} = \frac{١٣١}{١٦٨}$$

مثال (٢):

$$\frac{\text{٥ س}}{\text{٦ ص}} - \frac{\text{٣ م}}{\text{٧ ن}} = \frac{\text{٥ س}}{\text{٦ ص}} \times \frac{\text{٧ ن}}{\text{٧ ن}} + \frac{\text{−٣ م}}{\text{٧ ن}} \times \frac{\text{٦ ص}}{\text{٦ ص}}$$

$$= \frac{\text{٣٥ س ن − ١٨ ص م}}{\text{٤٢ ص ن}}$$

مثال (٣):

$$\frac{\text{٣ أ}}{\text{(٥ ن + ٢)}} + \frac{\text{٥ أ}}{\text{(٢ ن − ٣)}}$$

$$= \frac{\text{٣ أ}}{\text{(٥ ن + ٢)}} \times \frac{\text{(٢ ن − ٣)}}{\text{(٢ ن − ٣)}} + \frac{\text{٥ أ}}{\text{(٢ ن − ٣)}} \times \frac{\text{(٥ ن + ٢)}}{\text{(٥ ن + ٢)}}$$

$$= \frac{\text{٣ أ (٢ ن − ٣) + ٥ أ (٥ ن + ٢)}}{\text{(٥ ن + ٢) (٢ ن − ٣)}}$$

$$= \frac{\text{٦ أ ن − ٩ أ + ٢٥ أ ن + ١٠ أ}}{\text{(٥ ن + ٢) (٢ ن − ٣)}} = \frac{\text{٣١ أ ن + أ}}{\text{(٥ ن + ٢) (٢ ن − ٣)}}$$

$$= \frac{\text{أ (١ + ٣١ ن)}}{\text{(٥ ن + ٢) (٢ ن − ٣)}}$$

ويلاحظ أنه لتحويل الكسر إلى كسر مكافىء له مقامه هو المضاعف المشترك الأدنى للمقامات استخدمنا القاعدة التى تقول ضرب بسط ومقام أى كسر فى كمية ≠ صفر لا تغير من الكسر أى $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ن أ}}{\text{ن ب}}$ حيث ن ≠ صفر. وقد استخدمنا فى المثال الثانى القاعدة $-\left[\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right] = \frac{\text{−أ}}{\text{ب}}$ لقسمة الأعداد الموجهة لتسهيل المعاملة بالأعداد الموجهة ولتجنب الوقوع فى أخطاء استخدام الاشارات. وعند معالجة الكسور الجبرية التى تحتوى على مقادير مركبة يراعى استخدام الأقواس والقواعد الخاصة بالأعداد الموجهة (قواعد الاشارات) بطريقة سليمة

لتسهيل وتحديد إجراء العمليات حتى لا يقع التلميذ فى خطأ كالموجود فى الخطوة الثانية من الآتى :

$$\left[\frac{\text{س} - ٤}{٣}\right]^{٢} - \frac{٢(\text{س} - ٤)}{٣} = \frac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦}{٩} - \frac{٢\text{س} + ٨}{٣}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ - ٦\text{س} + ٢٤}{٩}$$

أو الوقوع فى خطأ مثل :

$$\frac{٢\text{س} + ٣\text{ص}}{٥\text{أ}} \div \frac{٤\text{س} + ٦\text{ص}}{٢\text{أ}} \times \frac{٢\text{ب}}{٢\text{س}}$$

$$= \frac{٢\text{س} + ٣\text{ص}}{٥\text{أ}} \times \frac{٢\text{أ}}{٤\text{س} + ٦\text{ص}} \times \frac{٢\text{س}}{٣\text{ب}}$$

٤.٤.١ ــ المعــادلات :

يعتبر حل المعادلات الخطية من الأنشطة الرئيسية فى جبر المرحلة الاعدادية وقد يكون للتلميذ فكرة سابقة حدسية عن طريق حل بعض المعادلات مثل ٥ ن = ٣٠ أو أ + ٥ = ١٠ ، ولذا يستحسن أن تستبدل هذه الطرق الحدسية تدريجيا باستخدام القواعد والخواص الرياضية حتى يلم التلميذ بالأساس الرياضى فى خطوات حل المعادلات و يتجنب أساليب أو تعبيرات غير رياضية مثل « النقل من طرف إلى طرف » ، وكذلك يمكن الاستعانة بالرسم البيانى لتوضيح المعنى الهندسى لحل المعادلة . وفيما يلى نحاول اعطاء فكرة لتقديم المعادلات عن طريق الجمل المفتوحة ومناقشة تدريس المعادلة من الدرجة الأولى فى متغير وفى متغيرين والمعادلات التى تحتوى على كسور.

١ ــ تقديم المعادلات :

نراعى عند تقديم المعادلات أن يفهم التلميذ معنى المعادلة فى متغير أو أكثر وكذلك أن يفرق بين المعادلة والمتطابقة واللامعادلة .

ويمكن تقديم المعادلات عن طريق الجمل المفتوحة كما يأتى :

الجمل المفتوحة : إذا نظرنا إلى اللجمل المفيدة الآتية :

(١) السودان موجودة فى آسيا .

(٢) القاهرة هى عاصمة جمهورية مصر العربية .

(٣) ذهب إلى القمر.

فاننا نجد أن الجملة الأولى خطأ والثانية صحيحة والثالثة ليست صحيحة وليست خطأ ونقول على مثل هذه الجملة أنها جملة مفتوحة .

ولكن إذا وضعنا بدل الضمير الغائب إسما لرجل ما فاننا نستطيع أن نقول أن الجملة إما أن تكون صحيحة أو خطأ .

فمثلا إذا وضعنا «ادوين الدرين» صارت الجملة «ذهب أدورين الدرين إلى القمر» صحيحة ، ولكن إذا وضعنا «أحمد» صارت الجملة «ذهب أحمد إلى القمر» خطأ .

وبالمثل الجمل الرياضية (التقارير) الآتية :

(١) ٢ + ٢ = ٥ .

(٢) ٨ > ٧ .

(٣) س — ٢ = ٥ .

الجملة الأولى خطأ والثانية صحيحة أما الجملة الثالثة فهى جملة مفتوحة لأنها ليست صحيحة وليست خطأ ولكن إذا وضعنا مكان س عدد فان الجملة يصير لها معنى ونستطيع أن نحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ .

فمثلا إذا وضعنا ٧ بدلا من س صارت الجملة (التقرير) صحيحة وإذا وضعنا ٥ بدلا من س صارت الجملة خطأ . تسمى س فى هذه الجملة شاغل مكان أو مجهول أو متغير كما تسمى مثل هذه الجملة أو التقرير الرياضى الذى يتكون من طرفين بينهما (=) بمعادلة . تسمى الفئة التى إذا حل أى عنصر فيها محل س فى الجملة المفتوحة صارت

صحيحة بفئة الحل لهذه الجملة المفتوحة. وعلى ذلك فان ايجاد حل المعادلة هو عملية ايجاد فئة الحل للمعادلة.

وقد تحتوى فئة الحل على عنصر أو أكثر أو تكون الفئة الخالية، يمكن إعطاء أمثلة توضح ذلك. فمثلا فئة الحل لكل من المعادلات الآتية (باعتبار س عدد حقيقى):

س − ٣ = ٥ ، س^{٢} − ٢ ص = صفر ، س^{٢} − ٨ س + ٢٢ = ٠ هى على الترتيب:

{٨} ، {١ ، ٢} ، ϕ .

أما الجملة الرياضية المفتوحة ٢ س + ص = ١٠ فهى تحتوى على شاغلى مكان (متغيرين أو مجهولين)، وفئة الحل لهذه المعادلة (باعتبار س، ص عدد حقيقى) تكون ثنائيات مرتبة من الأعداد. فمثلا من فئة الحل لهذه المعادلة الثنائيات (١ ، ٨)، (٢ ، ٦)، (٣ ، ٤)، بينما (٠ ، ٥)، (−٣ ، ٧) فليست من فئة الحل. وذلك لأنه لو أخذنا س = ١ ، ص = ٨ فى الجملة المفتوحة صارت الجملة ٢ × ١ + ٨ = ١٠ صحيحة بينما لو أخذنا س = صفر، ص = ٥ فى الجملة المفتوحة صارت الجملة ٢ × صفر + ٥ = ١٠ خطأ.

ويمكن إعطاء أمثلة من جمل مفتوحة أخرى يتعرف التلميذ منها على المتطابقات واللامعادلات ليفرق بينها و بين المعادلة.

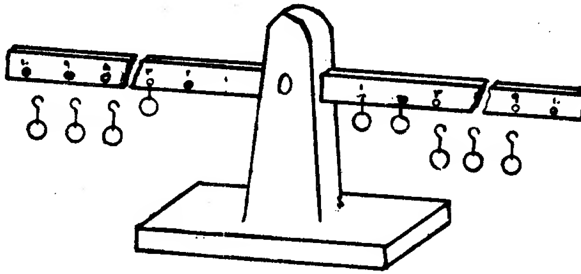
فمثلا الجملة المفتوحة (س + ٣)^{٢} = س (س + ١٥) − ٩ (س − ١) فى محاولة حلها نجد أنها تكافىء

س^{٢} + ٦ س + ٩ = س^{٢} − ١٥ س − ٩ س + ٩ وهذه تكافىء،
س^{٢} + ٩ س + ٩ = س^{٢} + ٦ س + ٩ وهذه تكافىء صفر = صفر.

نلاحظ أن أى قيمة للمتغير س يجعل أى جملة سابقة صحيحة. وفئة الحل هى فئة كل الأعداد الحقيقية. وتسمى هذه الجملة بالمتطابقة للفرق بينها و بين المعادلة.

أما الجملة المفتوحة التى تحتوى على طرفين بينهما علاقة اقل من > أو أكثر من < فتسمى اللامعادلة مثل س < ٥ أو س > ٢. وفئة الحل للجملة الأولى (اللامعادلة) باعتبارس عدد حقيقى هى كل الأعداد التى هى أكبر من ٥. أما فئة الجمل للجملة الثانية فهى كل الأعداد التى هى أقل من ٢.

ويمكن تقديم المعادلات للمراحل المبكرة (حتى فى المرحلة الابتدائية) عن طريق إعطاء معنى ملموس وعن طريق وسائل وأجهزة قريبة من ذهن التلميذ يستطيع أن يكتشف منها التلميذ مفهوم المعادلة وحلها عن طريق موازين مناسبة مثل الوسيلة الموجودة فى شكل (١٤). والوسيلة عبارة عن مسطرة خفيفة مدرجة مرتكزة من مركزها



على محور ارتكاز بحيث تكون حرة الحركة حوله، زمثبت على كل رقم فى التدريج خطاف وحلقات متساوية الوزن يمكن أن تعلق فى هذه الخطافات، وعن طريق الحلقات المعلقة على طرفى الميزان التى تجعل الميزان يصل إلى وضع الاتزان الأفقى يستنتج التلميذ معنى المعادلة وحلها حتى قبل استخدام الرموز الجبرية وهنا نعبر عن شاغل المكان (أو المجهول) بمكان أو مربع خالى مثل □ + ١٤ = ١٩ وهى تعنى س + ١٤ = ١٩.

٢ ــ المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية):

عند التعرض للمعادلة من الدرجة الأولى وطريقة حلها يراعى تقديم المعادلة من الدرجة الأولى فى صورها المختلفة وتقديم الجمل المتكافئة مع توضيح الأساس الرياضى للقواعد (القوانين) المستخدمة فى

ايجاد حل المعادلة إما عن طريق وسائل ملموسة فى مراحل مبكرة .أو عن طريق خواص الحقل فى المراحل المتقدمة عندما يكون للتلميذ دراية بها .

فمثلا يستحسن أن تشمل أمثلة المعادلات الخطية الصور المختلفة مثل :

أ - س = ب س + أ = ب أ س + ب = حـ

أ - س = ب س - أ = ب س/أ = ب

أ س + ٨ = حـ س + د أ س ب س = حـ

ولتوضيح طريقة حل المعادلات الخطية للتلميذ المبتدىء (فى المراحل المبكرة) نستخدم الوسائل الملموسة مثل الوسيلة السابقة . فعندما يكون ذراع الميزان أفقيا يستطيع التلميذ أن يكتشف أن العمليات على كل من الجانبين لاتؤثر على المعادلة . فمثلا لحل المعادلة ٤ ص - ٩ = ص + ١٨ تبسط بأن نطرح ص من كل من الطرفين وهذه تعطى ٣ ص - ٩ = ١٨ وباضافة ٩ إلى كل من الطرفين تعطى ٣ ص = ١٨ + ٩ وتصبح المعادلة ٣ ص = ٢٧ والخطوة الأخيرة هى قسمة كل من الطرفين على ٣ وهذا يعطى ص = ٩ . وفهم هذه الفكرة الرئيسية لازمة للحل والميزان (الوسيلة) يقدم الخبرة اللازمة لاكتشاف هذه القاعدة .ويمكن تفسير هذه القاعدة بطريقة أكثر تجريدا للتلميذ فى مرحلة متقدمة نسبيا عن طريق توضيح الجمل المتكافئة وخواص الحقل .

فطريقة حل جملة مفتوحة ولتكن معادلة مثلا تعتمد على ايجاد جملة مفتوحة أبسط لها نفس فئة الحل الخاصة بالجملة الأصلية . فمثلا الجمل المفتوحة (المعادلات) الآتية :

س + ٧ = ٩ ، س + ٧ - ٧ = ٩ - ٧، س = ٢ جمل متكافئة لأن لها نفس فئة الحل .

وتبسط الجمل عن طريق خواص حقل الأعداد الحقيقية (وهذه يستحسن توضيحها فى خطوات الحل) . فمثلا عند حل المعادلة

٢ س – ١ = ٧ (حيث فئة التعويض هى فئة الأعداد الحقيقية) توضح الخطوات كما يلى :

٢ س – ١ = ٧	معطيـــــات
٢ س – ١ + ١ = ٧ + ١	بضافة المعكوس الجمعى للعدد – ١ لكل من الطرفين .
٢ س = ٨	التبسيط باستخدام خواص الحقل أ – ١ + ١ = صفر..
$\frac{1}{2}$ × ٢ س = $\frac{1}{2}$ × ٨	بضرب الطرفين فى $\frac{1}{2}$ أى فى المعكوس الضربى للعدد ٢ .
س = ٤	التبسيط باستخدام خواص الحقل أى ٢ × $\frac{1}{2}$ = ١

وعلى ذلك فئة الحل هى {٤}

ويمكـن أن نتحقق من فئة الحل بالتعويض بها عن س فى المعادلة المعطاه .

٣ ـ المعادلات من الدرجة الأولى فى متغيرين :

عـنـد الـتعرض لحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى مجهولين يستحسن أن نراعى أن يفهم التلميذ فى المراحل المتقدمة معنى فئة الحل بـالـنسبـة لمعـادلة من الـدرجة الأولى فى مجـهولين وأهـمية معرفة فئة الـتعـويـض ثـم بـالنسبة لمعادلتين آنيتين مع فهم الأساس الرياضى فى خطوات الحل .

فـمـثـلا بـالـنـسبة للمعادلة ٢ س + ص = ١٠ كما ذكرنا تعتبر جملة مفـتـوحـة فى متـغـيـرين . ونقول أن (أ ، ب) من فئة حل المعادلة إذا أخـذنـا أ مـكـان س ، ب مـكـان ص صارت الجـملة صحيحة . ونختار عـناصر س ، ص (أو ما نعوض عنهما أ ، ب) من فئة التعويض . فاذا كانت فئة التعويض هى

م = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٠ }

فـان فـئـة الحـل س = {(س، ص) : س ، ص ∋ م ، ٢ س + ص = ١٠ }

وبالتجربة نجد أن :

س = { (١، ٨) (٢، ٦)، (٣، ٤)، (٤، ٢) }

ونلاحظ أنه إذا كانت فئة التعويض مَ = { ١، ٢، ٣، ٤ } فان فئة الحل تكون { (٣، ٤) }

وبالنسبة للمعادلتين الآنيتين :

٢ س + ص = ١٠ (١)

٢ س − ص = ٢ (٢)

فاننا نفسر فئة الحل بأنها تقاطع فئة حل المعادلة (١) ولتكن $س_1$ بفئة حل المعادلة (٢) ولتكن $س_2$.

أى أن فئة حل المعادلتين الآنيتين تكون $س_1 \sqcap س_2$.

فمثلا إذا كانت فئة التعويض م = (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٠)

فان $س_1$ = { (١، ٨)، (٢، ٦)، (٣، ٤) و (٥، ٢) }

، $س_2$ = { (٢، ٢)، (٣، ٤)، (٤، ٦)، (٥، ٨)، (٦، ١٠) }.

وعلى ذلك فئة الحل للمعادلتين هى $س_1 \sqcap س$ = { (٣، ٤) }

أما عند تقديم حل المعادلتين الآنيتين للتلميذ المبتدىء فيكفى توضيح معنى حل المعادلتين هندسيا (كما سنوضح فى تدريس الرسم البيانى) أو جبريا مع توضيح الأساس الرياضى فى خطوات الحل. فمثلا الحل الجبرى للمعادلتين الآنيتين يأتى عن طريق الحصول على معادلات متكافئة نحصل منها على معادلات فى مجهول س فقط وأخرى فى ص فقط . فمثلا :

٣ س − ٢ ص = ٨ ...... (١)

...... (٤ $س^2$ − ٥ ص = ٨ ...... (٢)

حذف ص : ٣ س — ٢ ص = ٨ $\Longleftrightarrow$ ١٥ س — ١٠ = ٤٠
٤ س — ٥ ص = ٦ $\Longleftrightarrow$ ٨ س — ١٠ ص = ١٢

وبالطرح ٧ س = ٢٨
س = ٤

حذف س : ٣ س — ٢ ص = ٨ $\Longleftrightarrow$ ١٢ س — ٨ ص = ٣٢
٤ س — ٥ ص = ٦ ١٢ س — ١٥ ص = ١٨

وبالطرح ٧ ص = ١٤
ص = ٢

ومنها فئة الحل {(٤ ، ٢)} ويلاحظ أنه بالتعويض فى أى من المعادلتين (١)، (٢) عن س = ٤ ، ص = ٢ تصير الجمل صحيحة

٤ — المعادلات التى تحتوى على كسور:

يجد التلميذ بعض الصعوبة فى حل معادلات تحتوى على كسور بينما قد لا يجد هذه الصعوبة فى حل المعادلات التى تحتوى عليها. ولتخطى هذه الصعوبة يجب أن يفهم التلميذ ويعرف أن المعادلة التى تحتوى على كسر يمكن أن تحول إلى معادلة مكافئة لا تحتوى على كسر.

فمثلا لحل المعادلة $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{س} = \frac{٥}{٦}$ نصل إلى المعادلة المكافئة $\frac{٢ س + ٩}{٣ س} = \frac{٥}{٦}$ ومنها نصل إلى المعادلة المكافئة ٤ س + ١٨ = ٥ س ومنها ينتج أن س = ١٨ . أو من المعادلة $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{س} = \frac{٥}{٦}$ نصل إلى المعادلة المكافئة ٤ س + ١٨ = ٥ س (عن طريق ضرب كل من الطرفين فى م.م.أ للمقامات) ومنها س = ١٨ .

ويلاحظ أنه فى المثال السابق أمكن اختزال $\frac{\text{١٨}}{\text{س}}$ = ١٨ لأن س   صفر، أى س = صفر ليست حلا للمعادلة وإلا لما استطعنا اختزال $\frac{\text{س}}{\text{س}}$ ويجب أن ينبه التلميذ إلى ذلك حتى لا يقع فى خطأ مثل :

$$(\text{١})\qquad \frac{\text{١}}{(\text{٢ س + ١})(\text{س + ٢})} + \frac{\text{١}}{(\text{س — ١})(\text{س + ٢})} = \frac{\text{١}}{(\text{٢ س + ١})(\text{س — ١})}$$

يقوم التلميذ بضرب كل من الطرفين فى (س — ١) (٢ س + ١) (س + ٢) ويستنتج أن (س — ١) + (٢ س + ١) = س + ٢ ومنها س = ١ .

وهذا غير سليم لأن س = ١ ليست حلا للمعادلة لأن كلا من الطرفين غير معرف عندما س = ١

$$(\text{٢})\qquad \frac{(\text{٢ س}^{\text{٢}}}{\text{١ — س}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢ — ٣ س}}$$

يقوم التلميذ بقسمه كل من الطرفين على $\text{س}^{\text{٢}}$ ومنه نصل إلى :

$$\frac{\text{٢}}{\text{١ — س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ — ٣ س}}$$

وهذا غير سليم لأن س = صفر أحد جذور المعادلة .

ويلاحظ أن بعض التلاميذ قد يلتبس فى خطوات حل معادلة تحتوى على كسور وفى خطوات جمع الكسور. وهنا يجب أن نوضح أن الحالتين مختلفتين تماما ففى جمع الكسور الجبرية نحول كل كسر إلى كسر مكافىء له لا يختلف فى قيمة الكسر الأصلى، أما فى حل المعادلة التى تحتوى على كسور فانه يمكن تغيير صورة وقيمة الكسر مادامت المساواة بين الطرفين محفوظة أى لم تتغير.

أما فى حالة المعادلات التى تحتوى على جذور فيجب أن يتضح للتلميذ أن عملية تربيع الطرفين غير معكوسة بينما عملية أخذ الجذر التربيعى فعملية معكوسة ويمكن استخدامها فى حل المعادلات فمثلا لحل $\sqrt{س-٢}=-٢$.

$$\left(\sqrt{س-٢}\right)^{٢}=(-٢)^{٢} \Leftarrow س-٢=٤ \Leftarrow س=٦$$

بالتحقيق

$$\sqrt{٦-٢}=-٢ \Leftarrow \sqrt{٤}=-٢ \Leftarrow ٢\neq -٢$$

حيث أن الجذر الأساسي للعدد $\sqrt{٤}$ هو ٢ فان المعادلة ليس لها حل حقيقى وعلى ذلك فعملية تربيع الطرفين غير معكوسة، ولكن عملية أخذ الجذر التربيعى فهى معكوسة ويمكن استخدامها. فمثلا إذا كان $س^{٢}=٤ \Leftarrow س=\pm ٢$، وإذا كان $س=\pm ٢$ فإن $س^{٢}=(\pm ٢)^{٢}=٤$.

٥.١.٤ ـــ الرسم البيانى :

يستخدم الرسم البيانى فى المرحلة الاعدادية فى توضيح التغير وتمثيل المشاهدات فى التجارب وفى رسم الدالة من الدرجة الأولى وحل المعادلات الأنية من الدرجة الأولى بيانيا أو فى إعطاء صورة لاحصائيات بسيطة.

ولذا يجب العناية بتكوين المفاهيم الأساسية فى التمثيل البيانى واستخدام الوسائل الملموسة فى المراحل المبكرة والتدرج فى استخدام الطرق المجردة حتى يستطيع التلميذ تكوين نظام الاحداثيات على مستقيم وعلى مستوى فى ذهنه على أساس رياضى سليم، مع فهم المفاهيم المرتبطة وتطبيقاتها. وسنناقش فيما يلى طرق (استراتيجيات) تقديم نظام لاحداثيات على مستقيم وعلى مستوى و بعض تطبيقات الرسم البيانى والمفاهيم المرتبطة الخاصة برسم المعادلات وحل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى بيانيا.

١ ـــ استراتيجيات تقديم الاحداثيات على مستقيم :

تقوم معالجة الرسم البيانى فى الكتب التقليدية على اعطاء صورة مبسطة لنظام الاحداثيات فى مستوى.

ولكن اتضح تربويا ومنطقيا أن تكوين نظام الاحداثيات بصفة عامة فى ذهن التلميذ يتطلب التدرج فى معرفة نظام الاحداثيات على مستقيم (فى بعد واحد) وعلى مستوى (فى بعدين)، وعلى الفراغ (فى ثلاث أبعاد)، وهذا ما تتبعه بعض البرامج الحديثة حيث يمهد الرسم البيانى بتقديم نظام الاحداثيات على مستقيم ثم على مستوى. ويمكن تقديم نظام الاحداثيات على مستقيم باستراتيجيات مختلفة تتوقف على مستوى التلميذ ومعلوماته السابقة. ونقدم فيما يأتى بعضا من هذه الاستراتيجيات ثم نقدم بعض التطبيقات البسيطة التى توضح معنى الأشكال البيانية البسيطة فى مستقيم (بعد واحد)

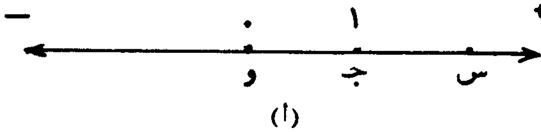
(١) يمكن تقديم نظام الاحداثيات على مستقيم عن طريق تمثيل الأعداد الموجهة هندسيا بخط الأعداد والاستعانة بالوسائل الملموسة فى ذلك كما ذكرنا سابقا. وهنا يمكن توضيح التناظر الأحادى بين نقط المستقيم والأعداد الحقيقية وتقديم احداثيات النقط على أنه ذلك التناظر الأحادى. أو يمكن أخذ احداثيات النقطة على أنها الازاحة اللازمة للوصول من نقطة الأصل إلى هذه النقطة وتكون الازاحة موجبة إذا كانت فى الاتجاه الموجب وسالبة إذا كانت فى الاتجاه السالب.

(٢) يمكن تقديم نظام الاحداثيات على مستقيم بأن نأخذ مستقيم ل ونقسمه بواسطة نقطة عليه و (أى و $\in$ ل) إلى نصفى مستقيمين (شكل ١٥ ــ أ). أحدهما موجب والآخر سالب، كل نقطة س $\in$ ل تعين بواسطة بعدها و س وبواسطة نصف المستقيم الذى تقع فيه. ولكى نتجنب أى التباس نكتب إشارة للبعد و س وتكون موجبة أو سالبة تبعا لما يكون موقع س فى نصف المستقيم الموجب أو السالب. ولتعيين البعد و س نختار نقطة حـ على نصف المستقيم الموجب بحيث نعتبر البعد و حـ يساوى الوحده.

ومن ثم تكون احداثيات النقطة س تساوى $\frac{\text{و س}}{\text{و حـ}}$ بالاشارة المناسبة. وبهذه الطريقة تكون كل نقطة س $\in$ ل لها أحداثى عدد حقيقى. زكل عدد حقيقى يعين نقطة على ل. أى يوجد تناظر احادى

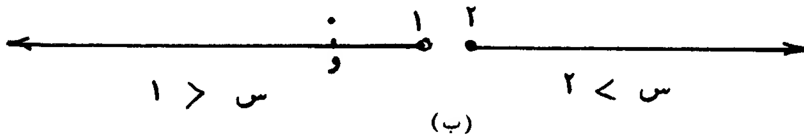
بين نقطة المستقيم والأعداد الحقيقية. تسمى و نقطة الأصل، حـ النقطة الأساسية و يسمى ل بهذا التوجيه محور.

ويمكن الاستعانة بتكوين نظام الاحداثيات على مستقيم (فى المراحل المبكرة) فى معرفة الشكل البيانى لجمل رياضية مفتوحة فى بعد واحد. فمثلا الشكل البيانى للمعادلة س - ٢ = صفر فى بعد واحد هو النقطة التى احداثيها ٢. والشكل البيانى للمعادلة س^{٢} = ٤ فى بعد واحد هو نقطتين احداثياتهما ٢، -٢. أما الشكل البيانى للمعادلة س > ٢ أو س < ١ فى بعد واحد فهو نصف مستقيم موجب رأسه النقطة التى احداثيها ٢ أو نصف مستقيم سالب رأسه النقطة التى احداثيها ١ على الترتيب شكل (١٥ ـ ب).



(أ)

شكل (١٥ ـ أ)



(ب)

شكل (١٥)

٢ ـ إستراتيجيات تقديم نظام الاحداثيات على مستوى :

يمكن التمهيد لتكوين نظام الاحداثيات على مستوى عن طريق وسائل ملموسة منها تعيين مكان أى تلميذ فى الفصل عن طرق الصف والعمود الذى يقع فيه أو عن طريق تعيين مكان بلد فى خريطة من الأطلس موضح بها خطوط الطول والعرض.

ويمكن أن يصل التلميذ إلى أن طريقة تعيين الأماكن فى الفصل أو فى الخريطة تحتاج إلى عددين. ومن مثل هذه الوسائل يستطيع التلميذ أن يكتشف الطريقة لتعيين النقط فى مستوى أى لتكوين نظام

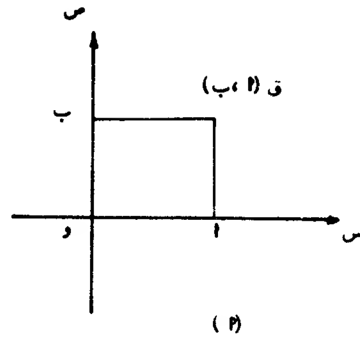
احداثيات على مستوى ومن ثم يمكن تقديم نظام الاحداثيات على مستوى باستراتيجيات مختلفة منها :

(١) اختيار نقطة أصل ومستقيمين يمران بها كمحورين س، ص ووحدة قياس مناسبة وعلى ذلك يمكن تفسير احداثيات نقطة فى مستوى كازاحات نجريها موازية للمحورين س، ص على الترتيب لنصل من نقطة الأصل «و» إلى هذه النقطة. وعادة نستخدم محورين متعامدين، بالمحور الأفقى س، المحور الرأسى ص وعلى ذلك لتعيين أى نقطة فى مستوى يلزمنا عددين مرتبين هم احداثياتها . وبالعكس أى عددين مرتبين يعينان نقطة فى مستوى . وهنا يجب أن يوضح التناظر الأحادى بين نقطة المستوى والثنائيات المرتبة من الأعداد الحقيقية . ويجب أن يوضح كذلك أهمية الترتيب فى احداثيات النقطة. فالنقطة التى احداثياتها (٢، ٣) ليست هى النقطة التى احداثياتها (٣، ٢) . وعادة عندما نقول النقطة (س، ص) فاننا نعى النقطة التى احداثياتها الثنائى المرتب من الأعداد الحقيقية (س، ص) .

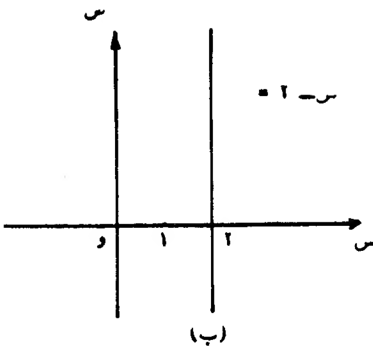
(٢) اختيار نقطة أصل و ومستقيمين متعامدين يمران بها . بأخذ نصفى مستقيمين متضادين (موجب وسالب) على كل مستقيم نقطة أصلهما «و» ليكونا المحورين س، ص بحيث يكون نصف المستقيم الموجب على محور الصادات هو الناتج من دوران نصف المستقيم الموجب لمحور السينات عكس عقرب الساعة زاوية $\frac{ط}{٢}$. لتعيين احداثيات النقطة ق فى المستوى نرسم من ق مستقيمين يوازيان المحورين ويتقاطعان مع المحورين س، ص ق النقطتين أ، ب. احداثيات النقطة ق (المتعامدة) بالنسبة لنظام الاحداثيات المتعامد المأخوذ المار بنقطة و هما العددان الحقيقان س، ص حيث ص هو البعد و أ، ص هو البعد و ب بالاشارة المناسبة. أنظر شكل (١٦ــأ) .

ويمكن الاستعانة بتكوين نظام الاحداثيات على مستوى فى معرفة الشكل البيانى لجمل رياضية مفتوحة فى بعدين مثل س - ٢ = صفر، س > ٢، س < ٢ التى توضحها الأشكال (١٦ــ ب، حـ، ى) .

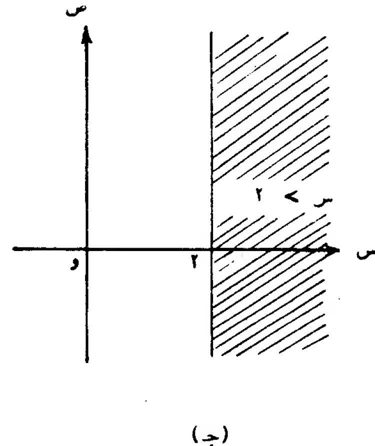
وهنا يتضح أن الشكل البيانى يختلف باختلاف البعد. فشكل المعادلة س - ٢ = صفر مثلا فى بعد واحد يكون نقطة ولكنه فى بعدين يكون خط مستقيم.



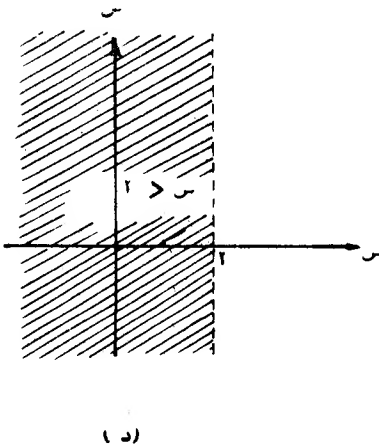
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

شكل (١٦)

٣ ـ تطبيقات الرسم البيانى ـ رسم المعادلات وحل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى بيانيا :

يوجد نوعان من الأشكال البيانية التى يرسمها التلميذ فى المرحلة الاعدادية . النوع الأول يستعمل لأخذ صورة عن علاقة موجودة بين كميات مختلفة يمكن مقارنتها ببعض ولكنها لا تعتمد على بعضها مثل بعض الأشكال البيانية الاحصائية . والنوع الآخر يستخدم لأخذ صورة عن العلاقة بين متغيرين أو أكثر مرتبطين مع بعض بحيث تكون المتغيرات معتمدة بعضها على بعض مثل رسم المعادلات أو الدوال من الدرجة الأولى أو توضيح التغير من مشاهدات تجريبية .

ولأى نوع من الأشكال البيانية يجب أن يكون الرسم البيانى وسيلة لتمثيل ما هو معطى وعمل المقارنات والوقوف على العلاقات الموجودة . وعند التعرض للرسم البيانى يجب ألا يكون الاهتمام مركزا على اكتساب التلميذ الطريقة فى عمل الرسم البيانى فهذا مهم ولكن ليس كافيا ، إذ لابد أن يعرف التلميذ أيضا خلال الرسم البيانى معنى الأشكال البيانية والدلالة الهندسية لمكوناتها الجبرية .

فمثلا جرت العادة فى تدريس رسم الشكل البيانى لمعادلة مثل ٢س + ٥ص = ٩ أن نعمل جدول لثنائيات مرتبة من الأعداد تحقق المعادلة ثم يوضح للتلميذ تمثيل الثنائيات المرتبة بنقط فى المستوى ثم رسم خط مرن يمر بهذه النقط ليعطى الشكل البيانى المطلوب . والتركيز على عمل للشكل البيانى قد ينسى المدرس توضيح بعض المفاهيم الأساسية المرتبطة مثل اعتماد أحد المتغيرين على الآخر ، والقيم المسموحة للمتغير (فئة التعويض للمتغير) ، وتسمية المحاور . واختيار مقياس الرسم المناسب . ومن ثم فان هذه الطريقة لا تؤدى إلى تكوين بعض المفاهيم بصورة سليمة مثل مفاهيم التغير ، الاستمرار ، الاعتماد والتى يجب أن يعتنى بها المدرس خلال تدريسه للرسم البيانى . ولتوضيح مثل هذه المفاهيم من خلال الرسم البيانى نأخذ المثال الآتى :

إذا كان ثمن كيلو الجبن ٣٤ قرشا فان القاعدة التى تعبر عن الثمن ك بالجنيهات لعدد ن من الكيلوجرامات من الجبن هى ك = ٣٤, × ن. وهذه القاعدة تعطى مثالا لاعتماد المتغير ك (الثمن الكلى) على المتغير ن (عدد الكيلوجرامات) حيث يكون ثمن الكيلوجرام ٣٤, جنيه مقدارا ثابتا.

وهذه القاعدة يمكن أن نأخذها أساس لعمل الرسم البيانى لها الذى يبينه شكل (١٧). وبعد عمل الرسم البيانى يمكن أن نوضح بعض المفاهيم عن طريق أسئلة تتحدد اجابتها من الرسم البيانى مثل:

ما الذى يحدث عندما يزداد عدد الكيلوجرامات؟ عندما يزداد الثمن هل يزداد عدد الكيلوجرامات بنفس النسبة؟ هل النقص فى أحد المتغيرين يتبعه نقص فى المتغير الآخر؟ كيف يؤثر سعر الكيلوجرام للجبن فى اتجاه الخط البيانى؟ كم عدد الكيلوجرامات التى يمكن شراءها تقريبا بالمبالغ الآتية ١ جنيه، ١,٥ جنيه، ٢ جنيه، ٣ جنيه، بالاستعانة بالشكل البيانى؟ هل يبين الرسم البيانى ثمن ٨ كيلوجرامات من هذا الجبن؟ لأى نقطة على الخط البيانى يكون احداثيها الصادى ٣٤, من احداثيها السينى؟ بين بالرسم البيانى كيف يعتمد الثمن على عدد الكيلوجرامات؟ فسر كيف يبين الرسم البيانى أن عدد الكيلوجرامات من الجبن يمكن أن يعتمد على ثمن شرائه. ومن مثل هذه الأسئلة يتضح للتلميذ طبيعة اعتماد أحد المتغيرين على الآخر، معنى التغير، معنى المتغير التابع والمستقل، معنى الاحداثيات. ومنها أيضا يعرف التلميذ كيف يربط بين العلاقات الموجودة فى الرسم البيانى والعلاقات الموجودة فى القاعدة (أو المعادلة) الجبرية للرسم البيانى. وبهذا يعرف التلميذ معنى الرسم البيانى للمعادلة من الدرجة الأولى والدلالة الهندسية للمتغيرات والثوابت فيها.

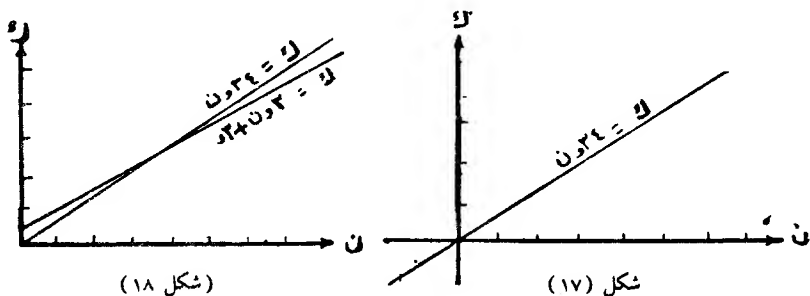
ويمكن أيضا توضيح المعنى الهندسى للرسم البيانى لمعادلتين آنيتين وفئة حلهما مع توضيح بعض المفاهيم المرتبطة عن طريق مثال كالآتى:

نأخذ ك = ٣٤, ن كما فى المثال السابق، ونأخذ ك = ٣٠, ن + ٣,
لتبين ثمن ن من الكيلوجرامات بالجنيه لمحل جملة يبيع ثمن الكيلو سعر ٣٠, جنيه ويضيف ٣, جنيه للتوصيل. وبعد رسم الشكل البيانى للمعادلتين الآنيتين السابقتين كما هو موضح فى شكل (١٨) وهو يمثل خطين متقاطعين، يمكن بالاضافة إلى الأسئلة التى ذكرناها فى المثال السابق أن نوضح بعض المفاهيم المرتبطة الأخرى عن طريق أسئلة تتحدد اجابتها من الرسم البيانى مثل:

بأى مبلغ يمكن شراء نفس العدد من الكيلوجرامات من المحل الأول ومن محل الجملة؟ من أى من المحلين نشترى عددا أكثر من الكيلوجرامات بمبلغ ١ جنيه، ٥ جنيه، ٢ جنيه؟ كم عدد الكيلوجرامات الزائدة التى يمكن شراؤها إذا اشترينا من أحد المحلين بمبلغ يزيد بمبلغ ٤ جنيه عن المحل الآخر؟ من أى المحلين نشترى ٢ كيلوجرام بمبلغ أقل؟ هل ثمن التوصيل يؤثر على اتجاه الشكل (الخط) البيانى؟ وهل يؤثر ذلك على موضعه؟ هل أى تغير فى اتجاه الشكل البيانى يبين تغيرا فى ثمن الكيلوجرامات؟ وما السبب فى ذلك؟

ومن مثل هذه الأسئلة والاجابة عليها من الشكل البيانى يتضح للتلميذ معنى تقاطع مستقيمين أو معنى حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى، ومعنى اتجاه المستقيم الذى يؤدى إلى مفهوم ميل المستقيم، ومعنى الجزء المقطوع من المحور الصادى ومن ثم يعرف التلميذ المعنى الهندسى للثوابت م، حـ فى المعادلة

ص = م س + حـ عندما يصل إليها فيما بعد.



شكل (١٧)

(شكل ١٨)

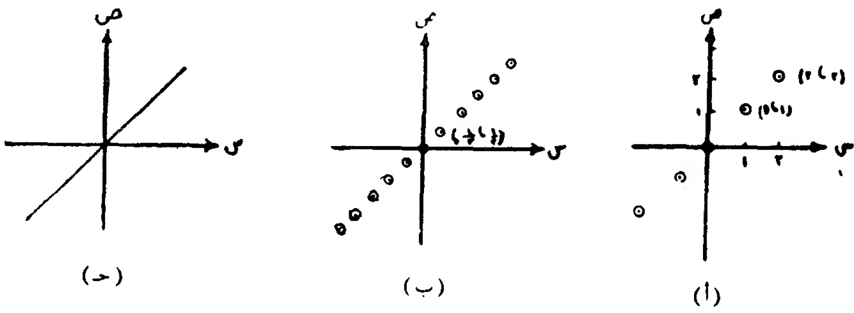
وعلى ذلك فمن المهم عند تقديم الرسم البيانى أن نستغل الرسم البيانى لتوضيح بعض المفاهيم المرتبطة (مثل التغير ، المتغير المستقل والتابع ، والثابت) والدلالات الهندسية للمتغيرات والثوابت . كما يمكن أيضا أن نمهد عن طريق الرسم البيانى التعريف الحديث للدالة وذلك عن طريق توضيح فئة التعويض للمتغير المستقل (وهو ما سوف يؤدى إلى تعريف فئة النطاق) ، وفئة المتغير التابع (وهو ما سوف يؤدى إلى تعريف فئة النطاق المصاحب) ومن ثم يمكن الوصول إلى تعريف الدالة عن طريق النطاق والنطاق المصاحب والقاعدة التى تعين لكل عنصر فى فئة النطاق عنصرا وحيدا فى فئة النطاق المصاحب .

ويمكن للمدرس الاستعانة بأمثلة عديدة من الحياة أو المشاهدات التجريبية أو القواعد (القوانين أو التعبيرات) الرياضية لتوضيح التغير والمتغير والثوابت . ويمكن أخذ الثابت كحالة خاصة للمتغير يكون فئة التعويض له تحتوى على عنصر واحد . كما يمكن للمدرس أن يساعد التلميذ على معرفة أنواع الثوابت (الثابت المطلق والاختيارى) عن طريق أمثلة بسيطة ملموسة للمراحل المبكرة . فمثلا الثابت المطلق يمكن تعريفه بأنه الثابت الذى لا يتغير قيمته باختلاف الظروف مثل العدد ٢ ، ط ، هـ . أما الثابت الاختيارى يمكن تعريفه بأنه الثابت الذى يظل ثابتا أثناء ظرف معين ولن يتغير من ظرف إلى ظرف . وهنا يمكن أخذ درجة حرارة الجو كثابت اختيارى فى تجربة . فاذا أجريت التجربة صباح يوم ما فان درجة حرارة الجو نعتبرها ثابتة أثناء إجراء التجربة فى هذا اليوم ولكنها تختلف عندما نجرى التجربة فى صباح يوم آخر ولو أننا نعتبرها ثابتة أثناء إجراء التجربة فى اليوم الآخر .

وفى المثالين المذكورين الخاصين بشكلى (١٧) و (١٨) نعتبر ٣٤، ٣ ، ثابتين مطلقين .

ولتوضيح أهمية معرفة فئة التعويض للمتغير نأخذ مثال الرسم البيانى للمعادلة ص=س عندما تكون فئة التعويض لكل من المتغيرين س ، ص فئة الأعداد الصحيحة ، فئة الأعداد الصحيحة

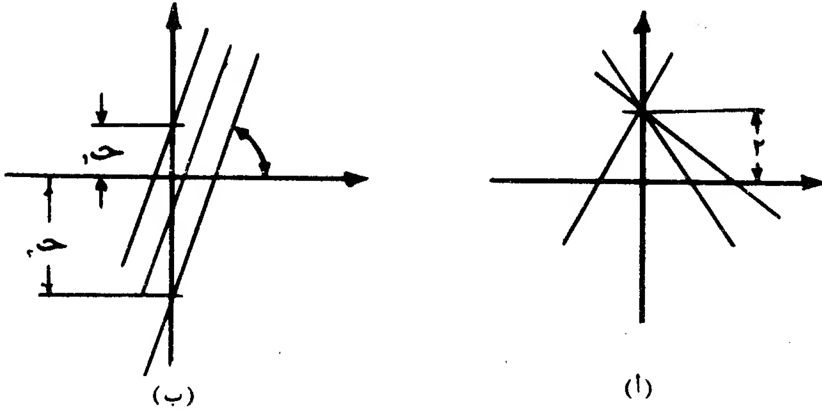
والأعداد التى تحتوى على نصف ، وفئة الأعداد الحقيقية على الترتيب . ففى الحالة الأولى يكون الشكل البيانى عبارة عن نقط منفصلة احداثياتها أعدادا صحيحة كما فى شكل (١٩ــأ) . أما فى الحالة الثانية فيكون الشكل البيانى نقطا منفصلة أكثر تقاربا ، احداثياتها أعدادا صحيحة وأعدادا تحتوى على نصف ، كما يتضح من الشكل (١٩ــب) . وفى الحالة الثالثة يكون الشكل البيانى خطا مستقيما مستمرا كما فى شكل (١٩ــحـ) .



شكل (١٩)

وفى مراحل متقدمة يمكن أخذ أمثلة لمعادلات خطية تحتوى على ثوابت اختيارية ومطلقة لتوضيح الدلالة الهندسية لهذه الثوابت . فمثلا بأخذ المعادلة ص = م س + ٢ وشكلها البيانى كما فى شكل (٢٠ــأ) يتضح أن ٢ ثابت مطلق وهو يعين الجزء المقطوع من محور الصادات وهو ثابت لكل مستقيم فى عائلة المستقيمات ، بينما م هى ثابت اختيارى يعبر فى هذه الحالة عن ميل المستقيم الذى يكون ثابتا لكل مستقيم ولكن يختلف من مستقيم لآخر فى العائلة . أو يمكن أخذ المعادلة ص = ٣ س + حـ لتوضيح أن ٣ هى الثابت المطلق ، حـ هى الثابت الاختيارى . والشكل البيانى لهذه المعادلة (٢٠ــب) يبين أن الثابت ٣ يوضح أن ميل المستقيمات فى العائلة واحد بينما الجزء المقطوع من محور الصادات حـ ثابت لكل مستقيم فى العائلة ولكن يختلف من مستقيم لآخر .

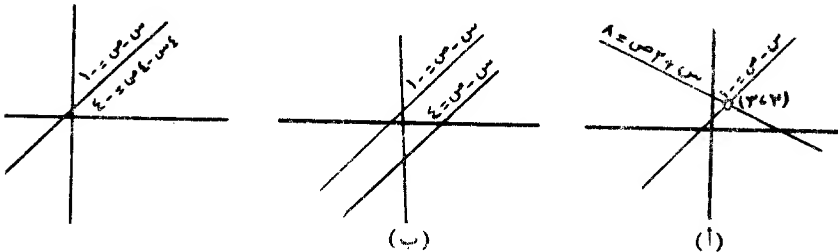
أما المعادلة ص=م س+حـ حيث م، حـ ثابتان اختياريان فهى تمثل عائلة كل مستقيمات المستوى ماعدا المحور الصادى وما يوازيه. أما المعادلة أ س+ب ص+حـ=صفر حيث أ، ب، حـ ثوابت اختيارية تمثل كل عائلة المستقيمات فى المستوى، وبذلك يتضح الدلالات الهندسية للثوابت المختلفة للمعادلة من الدرجة الأولى.



شكل (٢٠)

وعند استخدام الرسم البيانى للدالة (المعادلة) من الدرجة الأولى فى حل المعادلات الآنية من الدرجة الأولى يراعى أن تكون الأمثلة منوعة لتشمل فئة الحل عندما تكون محددة أو خالية أو غير محددة. والأمثلة الآتية تبين هذه الأنواع: المعادلتين الآنيتان س-ص=-١، س+٢ص=٨؛

س-ص=٤، س-ص=-١؛ س-ص=-١، ٤ س-٤ص=-٤
تكون فئة الحل فى كل منها على الترتيب: (٢، ٣)، ، الفئة



شكل (٢١)

الغير محددة اما التفسير الهندسى لهذه الفئات فيتضح من الأشكال (٢١ـأ، ب، حـ).

ويمكن للمدرس أن يستعين بالرسم البيانى فى توضيح المعنى الهندسى للخطوات التى يتبعها فى ايجاد حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى. فمثلا يمكن استخدام الطريقة الآتية (وقد جربت فى مشروع UICSM) فى حل المعادلتين الآنيتين

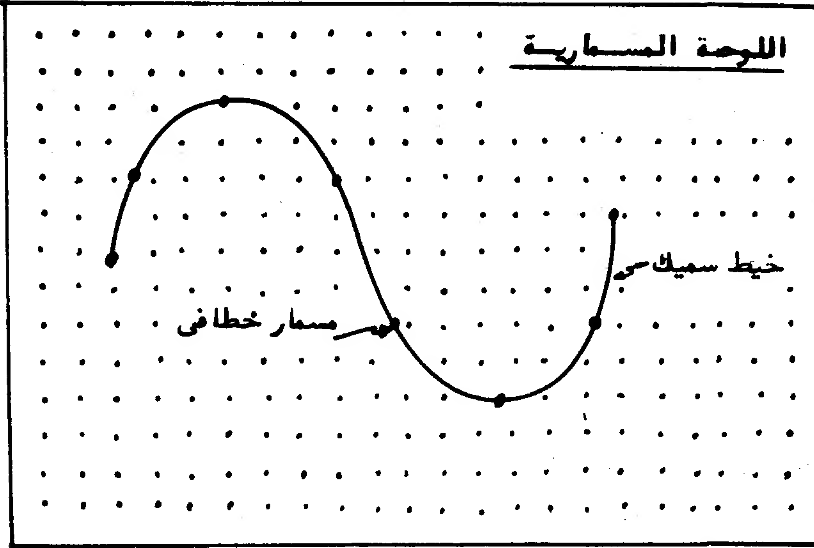
س - ص = -١ ...... (١)
س + ٢ص = ٨ ...... (٢)

وتتلخص الطريقة فى اتاحة الفرصة للتلميذ أن يكتشف أن المعادلة س-ص = -١ وأى معادلة تكافئها ناتجة من ضرب أو قسمة أحد طرفيها فى عدد ن ≠ صفر يكون شكلها البيانى هو نفس الشكل البيانى للمعادلة س-ص = -١. فمثلا الشكل البيانى للمعادلة س-ص = -١ هو نفس الخط البيانى للمعادلة ٢س-٢ص = -٢ أو ٣س-٣ص = -٣ أو $\frac{١}{٢}$س-$\frac{١}{٢}$ص = -$\frac{١}{٢}$.

ومن ذلك يتبين للتلميذ أن ضرب طرفى المعادلة الأولى فى عدد ≠ صفر لا يغير من شكلها البيانى، وكذلك ضرب طرفى المعادلة الثانية فى عدد ≠ صفر لا يغير من شكلها البيانى. أى أن المعادلات المتكافئة لها نفس الشكل البيانى.

ثم يتاح للتلميذ بعد ذلك الفرصة ليكتشف أن المعادلة الناتجة من جمع المعادلتين (١)، (٢) أو جمع المعادلتين المتكافئتين لهما هو مستقيم يمر بنقطة تقاطعهما (٢،٣)، ولكن هذه المعادلة لا تكافىء أى من المعادلتين (١)، (٢). وبذلك يستطيع التلميذ أن يدرك المعنى الهندسى لخطوات الحل الجبرى لمعادلتين آنيتين من الدرجة الأولى.

ويمكن أن يستعين المدرس بوسيلة فى تدريس الرسم البيانى كالوسيلة الآتية :ـ



شكل (٢٢)

والوسيلة تتكون كما فى شكل (٢٢) من لوحة مسمارية مقسمة ومسامير خطافية وخيط سميك. وتستخدم المسامير الخطافية لتمييز النقط على اللوحة التى تكون المحاور مرسومة عليها. وبامرار الخيط السميك (خيط دوبار أو سنارة) على المسامير الخطافية التى تمثل النقط نحصل على المنحنى المطلوب. وفى حالة رسم الشكل البيانى للمعادلات الخطية (أى لرسم المستقيمات) يمكن أن يستخدم خيط مطاط أو أستك أو نايلون يربط بين النقط (المسامير التى تحدد الخط).

٦.١.٤ ـ حل المشكلات الجبرية (المسائل فى الجبر):ـ

حل المشكلات الجبرية يمثل صعوبة لمعظم التلاميذ. والمشكلات الجبرية فى كتب المرحلة الاعدادية تتضمن علاقات يمكن تمثيلها بمعادلات بسيطة إلى حد ما. والصعوبة التى يواجهها التلاميذ تتمثل فى وضع هذه المعادلات، أى فى ترجمة الصيغ والتقارير اللغوية فى المشكلة إلى لغة جبرية بالرموز. وقد يرجع منشأ هذه الصعوبة إلى أن التلميذ ليس عنده القدرة أو غير متعود على أن يحلل ما يقرأه، أو لأن بعض العلاقات التى يقوم عليها وضع المعادلة غير موجودة صراحة فى

المشكلة (مثل العلاقة بين الوحدات أو بعض القوانين فى الجبر أو الحساب أو الهندسة) أولا لا يستطيع فهم أو تحديد لغة المشكلة (فمثلا هل يعنى التعبير س أقل من ٥ أن س < ٥ أم س-٥؟ ..)؛ أو لأن ليس لديه القدرة على حل المشكلات بصفة عامة. ومن الأفضل أن نحاول إعطاء التلميذ طريقة عامة فى حل المشكلات الجبرية وإلا فانه سيتمكن من حل المشكلات التى تقع تحت الأنماط التى أخذها وتعلمها فقط.

ومن الممكن أن نساعد التلميذ على تكوين المعادلات الجبرية من مثل هذه المشكلات الجبرية بتحديد طريقة مباشرة تستخدم فيها خطوات مثل.

١ ــ عبر عما تريد ايجاده أو شيء قريب منه بالرمز س.
٢ ــ عبر عن المجاهيل الأخرى فى المشكلة عن طريق الرمز س.
٣ ــ ابحث عن علاقات بين المتغيرات (المجاهيل). قد تكون هذه العلاقات فى صورة قوانين فى الحساب أو الجبر أو الهندسة.
٤ ــ استخدم هذه العلاقات فى تكوين معادلة يمكن حلها لايجاد س.

وفيما يلى مثال حله بهذه الطريقة:

مثال: مبلغان من المال مجموعهما ١٠٠٠ جنيه يستثمران تحت ربح ٥٪، ٦٪ على الترتيب إذا كان مجموع دخليهما فى السنة ٥٤٠ جنيه فما هى قيمة كل مبلغ على حده؟

١ ــ نفرض أن المبلغ الذى يستثمر بربح ٥٪ هو س.
٢ ــ المبلغ الآخر الذى يستثمر بربح ٦٪ هو (١٠٠٠-س).
٣ ــ الدخل فى السنة يأتى من القانون حـ = م ر. الدخل الكلى هو مجموع الدخلين.
٤ ــ ٠٥,٠ × س + ٠٦,٠ (١٠٠٠-س) = ٥٤٠

وقد يجد بعض التلاميذ صعوبة فى الطريقة السابقة أيضا. وهناك

طريقة أخرى (تستخدم فى المراحل الأعلى) قد تكون أفضل بالنسبة لهم. وتتضمن هذه الطريقة الخطوات الآتية:

١ — عبر عن كل الكميات المتغيرة فى المشكلة بالرموز س، ص، ...

٢ — بأخذ كل جملة (تقرير) فى المشكلة، ترجم المشكلة إلى معادلات تربط هذه الرموز (لاحظ أنه إذا كان لدينا ن من الرموز يكون عندنا ن من المعادلات. وقد يحدث أن عددا أقل من المعادلات يكون كافيا عندما توجد معلومات فرعية غير لازمة للحل). وبحلها نحصل على قيم المجاهيل المطلوبة.

مثال: علاء أكبر من أخته الآن بعشر سنوات. وبعد ثلاثة سنوات سيكون عمره ضعف عمرها.. فما هو عمر كل منهما الآن.

١ — عمر علاء الآن: س
عمر أخته الآن: ص
عمر علاء بعد ثلاث سنوات : ع
عمر أخته بعد ثلاث سنوات : ز

٢ — ع = س + ٣
ز = ص + ٣
س = ص + ١٠
ع = ٢ ز

ويلاحظ أن استخدام رموز أكثر يسهل عملية تمثيل المشكلة بالجبر. فعند استخدام رمزين فقط س، ص فان المعادلة الناتجة تكون:

س + ٣ = ٢ (ص + ٣)

وهذه يجد بعض التلاميذ صعوبة فى تكوينها. ولكن باستخدام الرموز الأخرى فان الجزء الذى يبدو صعبا ومعقدا يؤجل إلى مرحلة حل المعادلات. وهذه لا يجد التلاميذ صعوبة فيها حيث يستطيعون ايجاد الحل عن طريق التعويض البسيط الذى يألفوه.

وطريقة أخرى لحل المشكلات الجبرية تستخدم فى بعض البرامج الحديثة (مثل UICSM) تقوم على تشجيع التخمين ــ وهو الذى نادى به معلم حل المشكلات جورج بوليا. وهذه الطريقة تقدم أسلوبا مشوقا لكتابة المعادلة. فالتلميذ هنا يخمن الحل ويحقق صحته ويسجل تحقيقه بعناية فى صورة معادلة ــ (وعندما يكون فى بداية تعلمه لحل المشكلات قد يسأل أن يحاول محاولات كثيرة للحل). وعندما يكون التلميذ المعادلة التى تمثل تحقيقه يعوض عن المجهول بالحل الذى خمنه عند كل نقطة يظهر فيها. فمثلا فى المثال السابق يحاول التلميذ أن يخمن أن عمر أخت علاء ٩ سنوات مثلا.. ومن الحل المخمن:

$$١٩ + ٣ \stackrel{?}{=} ٢ (٩ + ٣)$$

ثم يوضع ص بدلا من ٩ وملاحظة أن ١٩ = ص + ١٠

نصل إلى المعادلة

$$(ص + ١٠) + ٣ = ٢ (ص + ٣)$$

وهذه الطريقة فى تكوين المعادلة بجانب أنها تشجع التخمين إلا أنها تتميز أيضا بتقليل أو تبسيط البارامترات (المتغيرات). فتبسيط المسألة (المشكلة) يجعل من الممكن رؤية محتواها واللعب بعناصرها.

وثم طرق أخرى توضيحية (تقليدية) بجانب الطرق السابقة فى حل المشكلات الجبرية وهى الطرق التى نستخدمها فى توضيح عناصر المشكلة بوضعها فى جدول أو باستخدام رسوم هندسية كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال: قطاران المسافة بينهما ٣٥٠ ميل يسيران على استقامة واحدة فى اتجاه واحد بحيث يتقابلان بعد مسافة معينة. يسير القطار الأول بسرعة متوسطة ٥٥ ميل / ساعة والقطار الثانى بسرعة متوسطة ٤٨ ميل / ساعة متى يتقابلان؟

العناصر المتضمنة فى المشكلة	القطار الأول	القطار الثانى
المسافة المقطوعة ، بالميل	س	٣٥٠٠ — س
السرعة ، بالميل فى الساعة	٥٥	٤٨
الزمن ، بالساعة	$\frac{س}{٥٥}$	$\frac{٣٥٠٠ - س}{٤٨}$

وبالتعويض فى تعبير الزمن لكل قطار نصل إلى المعادلة المطلوبة فى صورة جبرية :

$$\frac{س}{٥٥} = \frac{٣٥٠ - س}{٤٨}$$

وبحلها تنتج قيمة س وهى المسافة التى قطعها القطار الأول . وباستخدام القانون ف=ع ن نوجد الزمن المطلوب . ويمكن تبسيط الطريقة السابقة بالأخذ فى الاعتبار أن المسافة ٣٥٠٠ ثابتة وأن :

٣٥٠٠ = المسافة المقطوعة للقطار الأول + المسافة المقطوعة للقطار الثانى .... (١)

وبفرض الزمن ن وبالاستعانة بالجدول الآتى :

العناصر المتضمنة فى المشكلة	القطار الأول	القطار الثانى
السرعة ، بالميل فى الساعة	٥٥	٤٨
الزمن ، بالساعة	ن	ن
المسافة المقطوعة ، بالميل	٥٥ن	٤٨ ن

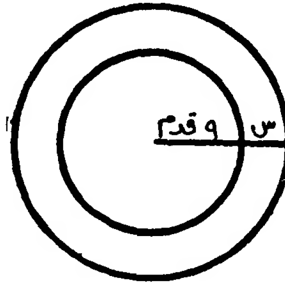
وبالتعويض فى (١) تنتج المعادلة :

٣٥٠ = ٥٥ن + ٤٨ وبحلها تنتج قيمة ن.

مثال: يراد عمل رصيف دائرى حول حوض زهور نصف قطره ٩ قدم . ما هو عرض هذا الرصيف إذا كانت مساحته ٦٣ ط ؟

$$(٩ + س)^٢ ط - ٨١ ط = ٦٣ ط$$

وبحلها وايجاد قيمة س الموجبة نصل إلى المطلوب .



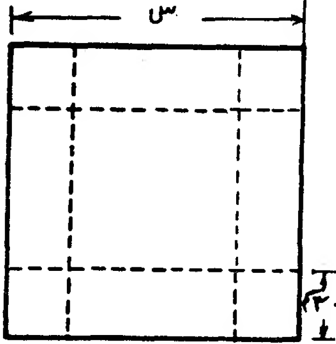
(شكل ٢٣)

وعموما يجب ألا يقيد المدرس التلميذ بطريقة معينة أو يختار مشكلات لها نمط معين فى الحل إلا إذا كان الغرض هو اكتساب مهارة فى استخدام طريقة ما. ومن المستحسن أن يساعد المدرس التلميذ فى ايجاد طرق مختلفة لحل مشكلة معطاة أو يجعله يكون مشكلات بنفسه تتميز بالأصالة من معادلة معطاة .وهذا أفضل من الاقتصار على إعطاء التلميذ مشكلات لها نفس نوع (طريقة) الحل.إذ أن ذلك يساعد التلميذ على تكوين مهارة أساسية فى حل المشكلات وهى المتعلقة بالتمثيل أو الترجمة فى اتجاهين أى الترجمة من الصيغ والتقارير اللغوية (أو الهندسية) إلى معادلات جبرية وبالعكس ترجمة المعادلات الجبرية إلى صيغ لغوية. ويلاحظ أن اختيار المدرس للمشكلات التى لها دلالة فى توضيح دور الرياضيات فى الحياة أو المشكلات الأصيلة غير العادية يجعل التلميذ يقدر ويسعد بحل المشكلات . ومن هذه المشكلات :

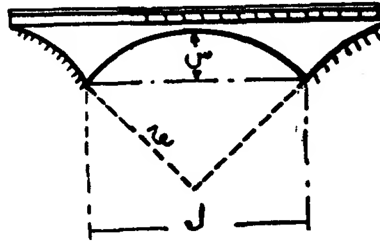
مثال: الشكل (٢٤ ــ أ) يبين جزءا (دائريا) من كوبرى . فان كانت ل=١٢م، نق=١٥م .. فأوجد س .

مثال: قطعة ورق مربعة قطع من أركانها أربعة مربعات متطابقة

طول ضلع كل منها ٢٠ سم كما هو مبين فى شكل (٢٤ ـ ب).
وعمل بالجزء الباقى متوازى مستطيلات بعد ثنى الأحرف الأخرى المنقطة بالشكل وكان حجم متوازى المستطيلات ٤٥٠ سم٣. أوجد طول ضلع المربع الأصلى.



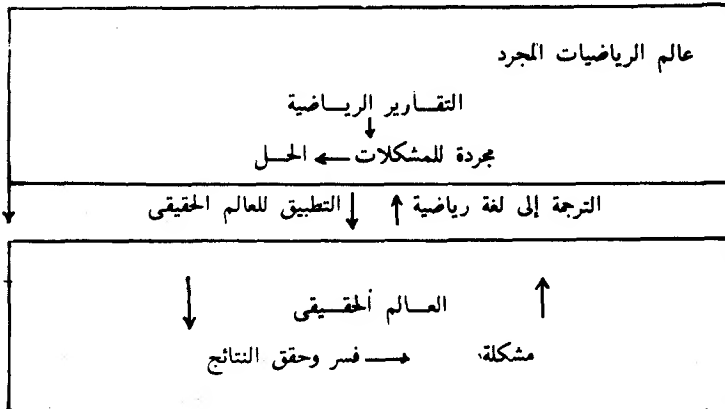
(ب)



(أ)

شكل (٢٤)

وتنمية قدرة التلميذ على ترجمة المشكلات إلى معادلات جبرية وبالعكس ترجمة المعادلات الجبرية إلى مشكلات ملموسة واقعية أو أصيلة يعطيه بصيرة عن العلاقة بين العالم المجرد والعالم الحقيقى (الواقعى). وشكل (٢٥) يوضح مثل هذه العلاقة.



شكل (٢٥)

ونقدم هنا باختصار بعض التوجيهات التى يمكن أن تساعد التلميذ فى معالجته للمشكلات الجبرية :

١ ــ إقرأ المشكلة بعناية وافحص جوهر المشكلة .

٢ ــ خذ فى الاعتبار كل عناصر المشكلة سواء عبر عنها صراحة أم لا .

ضع حروف أو رموز لتمثل كل عنصر (مجهول أو متغير) فى المشكلة .

٣ ــ حاول ايجاد عنصر يظل ثابتا فى المشكلة إذا أمكن . وعبر عن بقية المجاهيل به . أو أكتب كل المعادلات التى تربط المجاهيل المختلفة (ن من المعادلات لعدد ن من المجاهيل) .

٤ ــ أكتب المعادلة الأساسية لغويا بالكلمات .

٥ ــ ترجم المعادلة الأساسية إلى معادلة جبرية .

٦ ــ حل المعادلة وحقق النتيجة فى المشكلة الأصيلة . وبلغة أخرى فسر معنى النتيجة التى توصلت إليها فى المشكلة وتحقق أن هذه النتيجة تقابل شروط المشكلة ككل ولا تتعارض معها .

٧ ــ كن صبورا ولا تيأس .

٨ ــ أكتب الحل بطريقة مرتبة ونظيفة .

٩ ــ استخدم التخمين والتقدير فى حل المشكلات الغير معقدة .

١٠ ــ استعن برسم توضيحى (أو جدول) لتوضيح العناصر والعلاقات فى المشكلة إذا كان ممكنا .

١١ ــ استخدم طرقا مختلفة للحل .

١٢ ــ كون مشكلات جبرية مختلفة من معادلات تقابلها .

٢.٤ ــ الهندسة :

تربط هندسة المرحلة الاعدادية بين الهندسة الملموسة الخاصة بوصف الأشكال الهندسية والعلاقات بينها فى المرحلة الابتدائية وبين هندسة المرحلة الثانوية التى تختص بالمعالجة التجريبية . ولما كانت البرامج الحديثة فى تدريس الرياضيات تولى اهتماما برياضيات جميع المراحل

وخاصة المرحلة الابتدائية فان تدريس الهندسة للمرحلة الابتدائية طرأ عليه تطوير كبير فى المادة والطريقة . فمن ناحية أدخلت بعض موضوعات ثبت من التجارب (خاصة تجارب بياجيه) ضرورتها فى نمو المفاهيم الهندسية مثل بعض المفاهيم فى التوبولوجي (كالمنحنيات المقفولة والمفتوحة ، الخارج ، الداخل ، الحدود ، الاتصالية ، التوجيه) والمجسمات (كالصندوق ، الهرم ، الكرة ، الاسطوانة ، المخروط ، كعكة السميط) والتطابق والقياس . ومن ناحية أخرى فان طرق التدريس أصبحت تركز على اتاحة الفرصة للتلميذ للاكتشاف واستخدام الطرق التى تسهل التعميم بعد ذلك فى المراحل الأخرى كاعطاء التطابق ليس عن طريق حالات خاصة كتطابق المثلثات مثلا ولكن بتعميم ذلك لأى شكل هندسى عن طريق أفكار بسيطة للتحويلات الهندسية ، أو كما بينا سابقا فى نمو مفاهيم القياس .

وعلى ذلك فان هندسة المرحلة الاعدادية (أو ما يعادلها) التى تبنى على هندسة المرحلة الابتدائية قد طرأ عليها تغيير فى البرامج الحديثة يتركز فى طريقة معالجة المفاهيم المختلفة وتعميم خواصها وادخال بعض الاصطلاحات والمفاهيم الجديدة فى هذه المعالجة ، مع الانتقال إلى المعالجة التجريدية بطريقة تنمى فهم النظام التركيبى لهندسة المسلمات (البديهيات) وفهم البرهان المنطقى .

وعلى ذلك يجب على المدرس أن يراعى عند تدريس هندسة المرحلة الاعدادية الانتقال التدريجى من المعالجة الحدسية لمفاهيم الهندسة إلى المعالجة التجريدية وأن ينمى فى التلميذ تقدير وفهم الأسس المنطقية للنظام البديهى وطبيعة البرهان والتعود على استخدام لغة الفئات . وفيما يلى سنقدم فكرة عن معالجة بعض مفاهيم هندسة المرحلة الاعدادية عن طريق هندسة التحويلات ، النظام البديهى والبرهان الاستدلالى ، تطوير تدريس الهندسة الاقليدية بتوضيح الأساس البديهى باستخدام مدخل مبسط له ، تدريس الهندسة العملية (الانشائية) تقديم بعض الوسائل فى تدريس الهندسة .

١.٢.٤ ــ التحويلات الهندسية كمدخل للهندسة الابتدائية:

فيما يلى نتعرض إلى استراتيجيات تدريس بعض التحويلات الهندسية بصورة مبسطة واستنباط بعض المفاهيم والعلاقات الهندسية منها والموجودة فى هندسة المرحلة الاعدادية مع مناقشة كيفية تقديم التطابق.

التطـابق:

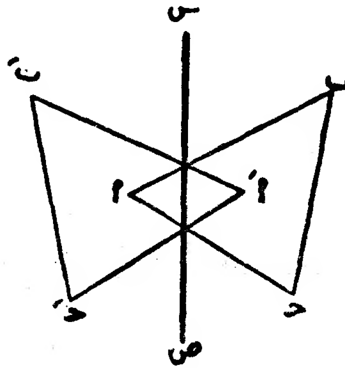
يمكن تقديم بعض المفاهيم الخاصة بالتطابق عن طريق هندسة التحويلات فى المراحل الأولى بوسائل ملموسة وأنشطة يقوم بها التلميذ. فمثلا يمكن أن ينمى مفهوم التطابق عن طريق استخدام ورق شفاف، مرايات. ويقدم تطابق الأشكال فى المستوى عن طريق استخدام أثر الأشكال والشرائح، تدوير الشكل (كحالة خاصة من تدوير المستوى). ويستخدم الورق الشفاف لتقديم مفاهيم الانعكاس والانتقال، الدوران للمستوى، كما يمكن استخدام المرآة أو طى الورق لتوضيح محور التماثل وتحصيل عدة تحويلات.

وفى المراحل المتقدمة يمكن تقديم التطابق أو التحويلات الهندسية عن طريق طرق مجردة؛ إما عن طريق بديهيات التطابق ثم تعريف التحويلات الهندسية (المتعاهدة) مثل الانعكاس، الانتقال، الدوران عن طريقها وهنا نعتبر التحويلات الهندسية وسيلة اضافية لتوضيح المفاهيم الهندسية؛ وإما عن طريق اعطاء هذه التحويلات الهندسية ثم استخلاص مفهوم التطابق منها.

وفيما يلى نحاول تقديم بعض التحويلات الهندسية مثل الانعكاس، الدوران، الانتقال بطرق حدسية غير مجردة تناسب المراحل المبكرة مع توضيح تطبيقاتها فى هندسة المرحلة الاعدادية ثم نناقش تقديم التطابق على أساس التحويلات الهندسيةأو بطريقة مجردة نابعة من الطريقة البديهية.

(١) الانعكاس :

يمكن التمهيد للانعكاس عن طريق طى ورق شفاف أو استخدام مرايا . فمثلا يمكن اعتبار س ص فى شكل (٢٦) مرآة، أَ، بَ ، حـَ صور أ ، ب ، حـ ثم بعد طى الورقة نشف على الجزء الآخر المطوى فى نفس الصفحة أثر النقط أ، ب، حـ فى الأماكن أَ، بَ ، حـَ.



شكل (٢٦)

وباستخدام أشكال أخرى يمكن الوصول إلى تعريف الانعكاس وخواصه مثل :

(أ) إذا كان أَ انعكاس نقطة أ ، ل هو المنصف العمودى للقطعة للمستقيم أ أَ فاننا نسمى أَ صورة أ فى ل تحت الانعكاس وتكون أ صورة أَ. شكل (٢٧ـــأ).

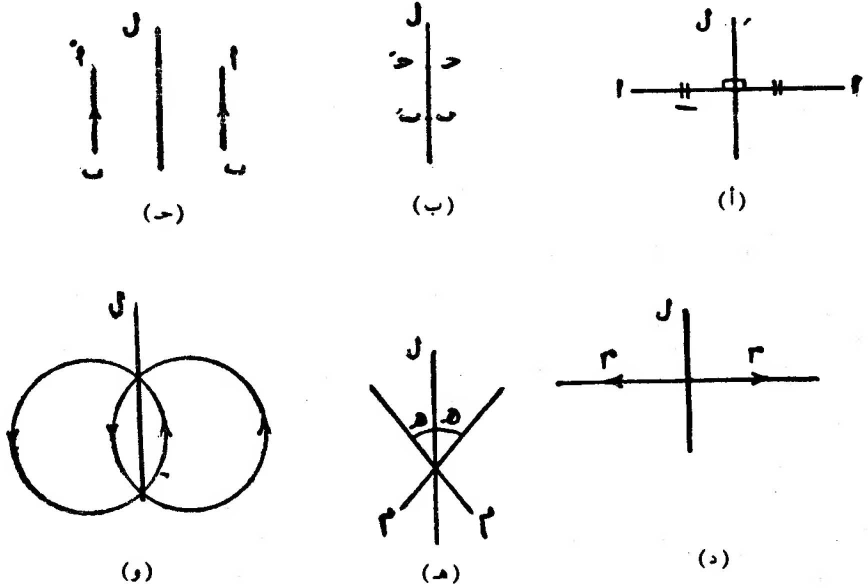
(ب) تنطبق نقط المستقيم ل على صورها .. شكل (٢٧ـــب) .

(جـ) صورة المستقيم الموازى للمستقيم ل هو مستقيم موازى للمستقم ل .. شكل (٢٧ـــحـ) .

(د) صور المستقيمات العمودية على ل تقع على نفسها ولكن توجيه المستقيم يتغير (يعكس اتجاهه فى صورته)ـــ المستقيم الموجه هو مستقيم مع أحد اتجاهيه ـــ شكل (٢٧ـــد) .

(هـ) ل ينصف الزاوية بين أى مستقيم (لا يوازى ل) وصورته .. شكل (٢٧ـــهـ) .

(و) الانعكاس يحفظ الطول والزوايا ولكنه لا يحفظ التوجيه.. شكل (٢٧ـ و).

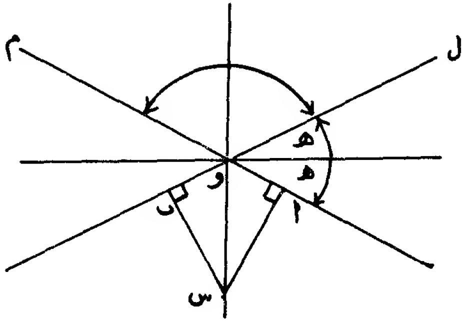


شكل (٢٧)

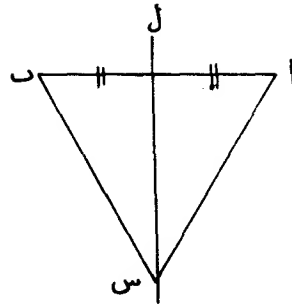
ومن بعض مفاهيم وعلاقات هندسة المرحلة الاعدادية التى يمكن التوصل اليها عن طريق الانعكاس وخواصه ما يأتى:

(أ) المنصف العمودى للقطعة أ ب هو فئة النقط المتساوية البعد عن كل من أ، ب. أى بلغة أخرى: ل هو المنصف العمودى للقطعة المستقيمة أ ب، س ∈ ل إذا وإذا فقط كان لأى نقطة س ∈ ل تكون القطعة المستقيم أ س تطابق للقطعة المستقيمة ب س.

البرهان: باعتبار ب س انعكاس (صورة) أ س فى المستقيم ل ينتج أن ب س ≡ أ س لأن الانعكاس يحفظ الأطوال. وبالعكس إذا كانت س أ ≡ س ب فانه يمكن اعتبار س أ صورة س ب بواسطة الانعكاس فى منصف الزاوية ∢ أ س ب وهى تؤدى إلى أن هذا المستقيم المنصف هو المنصف العمودى للقطعة أ ب (شكل ٢٨).



شكل (٢٩)



شكل (٢٨)

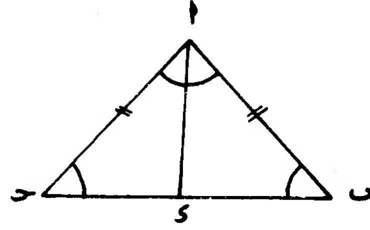
(ب) المنصفان ك، ن للزاويتين بين المستقيمين ل، م هما فئة النقط المتساوية البعد عن المستقيمين.

البرهان: إذا كانت س ∋ ك، سأ ⊥ م، سب ⊥ ل، وحيث أن الأطوال والزوايا محفوظة تحت الانعكاس فان أ ترسم على ب بواسطة الانعكاس فى ك (أى ب هى انعكاس أ) وعلى ذلك يكون سأ ≡ سب وبالمثل فى حالة ما يكون ص ∋ ن، ص متساوية البعد عن كل من ل، م.

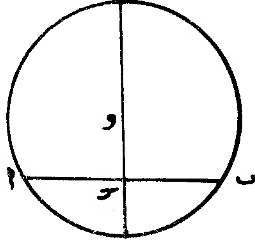
إذا كانت ع أى نقطة بحيث أن العمودين عحـ، عد على ل، م متساويان. فان الانعكاس فى ع و يبين أن ع و لابد أن يكون أحد منصفى الزاويتين.. شكل (٢٩).

(حـ) يكون المثلث متساوى الساقين إذا وإذا فقط تساوت زاويتا قاعدته.

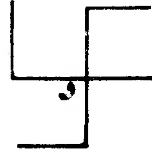
البرهان: بأخذ الانعكاس فى منصف زاوية الرأس أ، أى المنصف العمودى على ب‌حـ ـ كما فى شكل (٣٠ـب) ـ فان أب ≡ أحـ ⟸⟹ ب ترسم على حـ (أى حـ انعكاس ب)، دب يرسم على دحـ ومن ثم فان د منصف ب‌حـ، ∢ب ≡ ∢حـ.



شكل (٣٠)



شكل (٣١)



شكل (٣٢)

(د) القطر الذى ينصف وترا فى دائرة يكون عموديا عليه.

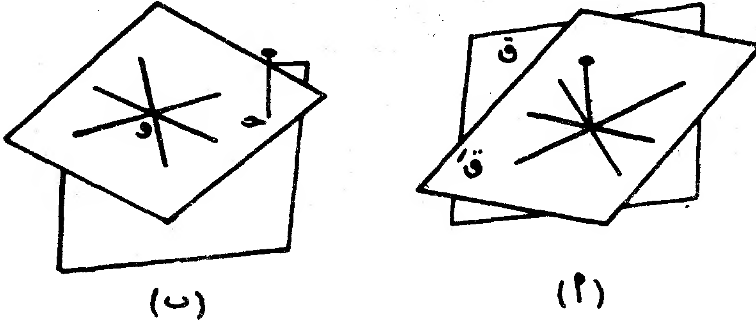
البرهان: بأخذ الانعكاس فى المستقيم وحـ فان القطر الواقع على المستقيم وحـ يكون عموديا على الوتر أب.. شكل (٣١).

يلاحظ أنه يمكن الوصول إلى البرهانين الآخرين عن طريق مفهوم التماثل. وكما نعرف إذا لم يتغير الشكل تحت تحويل هندسى— مثل المثلث المتساوى الساقين تحت الانعكاس أو الصليب المعقوف (شكل ٣٢) تحت الدوران بزاوية $\frac{1}{4}$ط حول مركز الصليب. فان الشكل يسمى شكل متماثل أو له خاصية التماثل. فاذا كان الشكل لا يتغير تحت الانعكاس فى مستقيم فاننا نسمى هذا المستقيم محور التماثل ونقول أن الشكل له خط تماثل.

أما إذا لم يتغير الشكل بالدوران زاوية ما حول نقطة و فاننا نقول أن الشكل له تماثل دورانى حول و، ويسمى و مركز التماثل. فمثلا فى شكل (٣٠) أد خط تماثل، المثلث أب حـ شكل متماثل. أما فى شكل (٣١) فان خط التماثل هو المستقيم وحـ، وشكل (٣٣) يبين أن الصليب المعقوف له تماثل دورانى حول و بزاوية = $\frac{1}{4}$ط.

(٢) الدوران :

يمكن تقديم الدوران فى مستوى عن طريق ورقتين شفاف ق ، ق ودبوس . برسم شكل ما على ق وبدوران قَ حول موضع الدبوس نرسم أثر الشكل على قَ وشكل (٣٣ـأ) يوضح الدوران حول و، شكل (٣٣ـب) يوضح الدوران حول نقطة أخرى حـ . ومن رسم أثر الأشكال يمكن التوصل إلى تعريف الدوران وخواصه مثل :



شكل (٣٣)

(أ) صورة النقطة أ تحت الدوران فى مستوى حول و بزاوية هـ هى النقطة أَ بحيث أن وأ = وأَ . ولأى نقطة س فى المستوى وصورتها سَ تحت هذا الدوران تكون الزاوية س و سَ = هـ . تسمى و مركز الدوران ، هـ زاوية الدوران .

(ب) يكون الدوران موجب إذا كان عكس اتجاه الساعة . الدوران بزاوية + هـ حول المركز يكافىء دوران بزاوية ـ (٣٦٠ ـ هـ) .

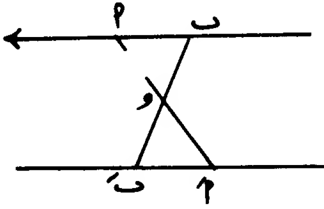
(حـ) مركز الدوران نقطة ثابتة تحت تحويل الدوران ، وهو النقطة الوحيدة الثابتة .

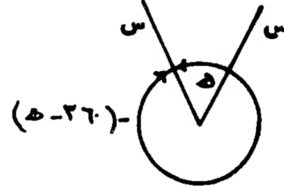
(د) عند دوران شكل فان كل مستقيم فى الشكل يدور بنفس الزاوية . شكل (٣٤ـب) .

(هـ) إذا كانت هـ = ١٨٠° نسمى الدوران نصف دورة أو انعكاس فى نقطة و (حيث و مركز الدوران) وهنا كل الأشعة تعكس

توجيهها . كل مستقيم بعد نصف دورة يكون موازيا لصورته . شكل (٣٤ــ حـ) .

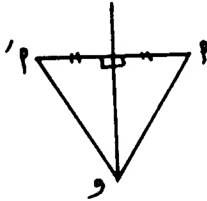
(و) إذا دارت نقطة أ حول و إلى أَ فان وأ ≡ و أَ ، «و» تقع على المنصف العمودى للقطعة أأَ . شكل (٣٤ــ ٤) .



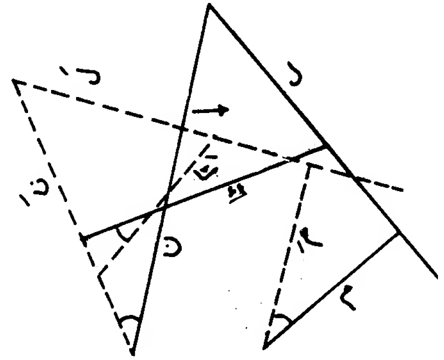


(حـ) ·

(أ)



(د)



(ب)

شكل (٣٤)

(ز) لايجاد مركز الدوران نرسم المنصف العمودى للقطعة أأَ (حيث أَ صورة أ بالدوران) والمنصف العمودى للقطعة ببَ (حيث ب ، بَ نقطة أخرى وصورتها) . تقاطع هذين المنصفين يكون هو مركز الدوران .

(ح) الدوران يحفظ مقادير الزوايا والأطوال ويحفظ التوجيه .

(٣) الانتقــال :

باستخدام وسائل بسيطة لتحريك مستوى مثل ورق شفاف ورسم

أثر الأشكال الناتج من تحريك المستوى (الورق الشفاف) مسافة ثابتة فى اتجاه ثابت يمكن أن نصل إلى تعريف تحويل الانتقال وخواصه مثل :

(أ) الانتقال هو تحريك نقط المستوى, بحيث أن كل نقطة تتحرك فى نفس الاتجاه نفس المستوى .

(ب) يتعين الانتقال تعيينا كاملا بواسطة المسافة والاتجاه . فاذا كانت صورة النقطة أ تحت الانتقال هى أَ فاننا نشير إلى الانتقال بالمتجه $\overleftarrow{\text{أ أَ}}$.

(حـ) لا يوجد نقطة ثابتة تحت الانتقال (إلا إذا كان الانتقال هو الانتقال الصفرى فانه يترك كل نقطة ثابتة) .

(د) الانتقال يحفظ المسافات والزوايا والتوجيه .

(هـ) الانتقال $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ثم الانتقال $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ يكافىء الانتقال $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$.

ومن الانتقال يمكن تقديم المتجهات وخواصها حيث يمكن بواسطتها معالجة بعض هندسة المرحلة الاعدادية خاصة تلك التى تختص باقامة الأعمدة و بالتنصيف والتوازى .

فمثلا يمكن اثبات نظرية منصف ضلعى المثلث عن طريق المتجهات كما يأتى :

فى المثلث $\triangle$ ل م ن إذا كانت س منتصف $\overline{\text{ل م}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ فان $\overline{\text{س ص}} \,//\, \overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{س ص}} = \frac{1}{2}\overline{\text{م ن}}$.

البرهان :

بفرض أن المتجه $\overleftarrow{\text{ل م}}$ يمثل المتجه ٢ $\underline{\text{أ}}$، المتجه $\overleftarrow{\text{ل ن}}$ يمثل المتجه ٢ $\underline{\text{ب}}$ فان المتجه $\overleftarrow{\text{م س}} = \overleftarrow{\text{س ل}} = \underline{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل ص}} = \overleftarrow{\text{ص ن}} = \underline{\text{ب}}$ وعلى ذلك فإن

$$\overleftarrow{\text{س ص}} = \overleftarrow{\text{س ل}} + \overleftarrow{\text{ل ص}} = \underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} \text{ ،}$$

$$\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{م ل}} + \overleftarrow{\text{ل ن}} = ٢\underline{\text{أ}} + ٢\underline{\text{ب}}$$

$$= ٢(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}})$$

وعلى ذلك فالمتجه $\overleftarrow{\text{س ص}}$ // المتجه $\overleftarrow{\text{م ن}}$ و يساوى نصفه .
أى أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \equiv \frac{1}{2} \overline{\text{م ن}}$ أنظر شكل (٣٥ـ أ) .

كما يمكن أيضا باستخدام المتجهات اثبات نظرية فيثاغورث فى مراحل متقدمة عندما يلم التلميذ بحاصل الضرب القياسى للمتجهات ، وجبر المتجهات .

فكما نعرف إذا كان الرمز « ٠ » يدل على حاصل الضرب القياسى فان طول المتجه $\underline{أ}$ ونرمز اليه بالرمز $||\underline{أ}||$ يساوى $\sqrt{\underline{أ}.\underline{أ}}$ ، ومن خواص حاصل الضرب القياس للمتجهات الغير صفرية .

$\underline{أ}.\underline{ب} = \text{صفر} \Longleftrightarrow \underline{أ} \perp \underline{ب}$ .... (١)

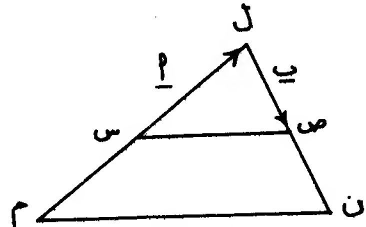
ومن الخاصية $||\underline{أ}+\underline{ب}|| = ||\underline{أ}||^{٢} + ||\underline{ب}||^{٢}$

$+ ٢ \underline{أ}.\underline{ب}$ .... (٢)

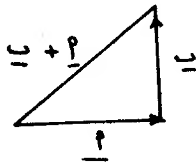
فى حالة $\underline{أ} \perp \underline{ب}$ ، من (١) ، (٢) نصل إلى

$||\underline{أ}+\underline{ب}||^{٢} = ||\underline{أ}||^{٢} + ||\underline{ب}||^{٢}$

وهى نظرية فيثاغورث . أنظر شكل (٣٥ـ ب) .



شكل (٣٥ـ أ)



شكل (٣٥) (ب)

رأينا فيما سبق كيفية تقديم بعض التحويلات الهندسية مثل الانعكاس والدوران والانتقال بطرق حدسيه تعتمد على وسائل بسيطة فى تقديمها . وتقديم هذه التحويلات بهذا الأسلوب يمكن اعتباره مدخلا لتقديم التطابق بطريقة ملموسة مناسبة للتلميذ فى المراحل المبكرة .

فمن تعيين صور الأشكال المختلفة تحت تحويلات الانعكاس

والدوران والانتقال (أى تحت تحصيل بعض من هذه التحويلات) يمكن أن يستنتج التلميذ أن هذه التحويلات لاتغير فقط الأبعاد والزوايا (أى تحفظ الأبعاد والزوايا) ولكنها لها خاصية أخرى، وهى خاصية رسم كل شكل على شكل يطابقه. أى أن صورة كل شكل تحت مثل هذه التحويلات هو شكل يطابق الشكل الأصلى. ومن ثم فان التلميذ يعرف المبرر فى تسمية هذه التحويلات بتحويلات التطابق أو التساوى القياسى isometry.

وفى مراحل متقدمة للتلميذ، يمكن اعطاءه الصورة العامة لهذه التحويلات الهندسية والتطابق. فيعرف التحويل الهندسى للمستوى (أو الفراغ) بأنه الدالة الأحادية التى ترسم نقط المستوى (أو الفراغ) فوق نفسه. أما تحويل التطابق أو التساوى القياسى (ومن أمثلته الانعكاس، الدوران، الانتقال) فيعرف بأنه التحويل الهندسى الذى يرسم القطعة المستقيمة على قطعة مستقيمة مطابقة لها أى هو التحويل الهندسى الذى يحفظ البعد (سواء فى مستوى أو فى فراغ).

ومن ثم فالتعريف العام للتطابق يكون: يسمى الشكلان (أو أى فئتين من نقط المستوى أو الفراغ) متطابقان إذا ،إذا فقط وجد تحويل تطابق (أى تساوى قياسى) يرسم أحد الشكلين على الآخر (أو الفئة على الأخرى).

وعلى ذلك فانه يمكن تقديم التطابق بصورة مجردة عن طريق التحويلات الهندسية ونلاحظ أن هذه ليست الطريقة (الاستراتيجية) الوحيدة المجردة لتقديم التطابق فيمكن تقديم التطابق عن طريق الطريقة البديهية. فمثلا يمكن تقديم التطابق عن طريق نظام معدل لنظام هيلبرت للهندسة الاقليدية كما يأتى:

نأخذ س فئة من النقط أ، ب، حـ، س، ص ... ونأخذ العلاقة الأولية ت وهى تسمى علاقة تساوى البعد، التعبير ت (أ، ب؛ حـ، د) يعنى بعد النقطة أ عن النقطة ب يساوى بعد النقطة حـ عن النقطة د.

ولنأخذ العلاقة الأولية ب، وهى تسمى علاقة البنية، التعبير ب (أ، ب، حـ) يعنى أن النقط أ، ب، حـ على استقامة واحدة وأن النقطة ب تقع بين النقطتين أ، حـ.

بديهيات التطابق :

(١) إذا كانت ت (أ، أ؛ س، ص) فإن س = ص. أى إذا كان بعد أ عن أ هو بعد س عن ص فإن س تنطبق على ص.

(٢) ت (أ، ب؛ ب، أ). أى أن $\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{ب أ}}$.

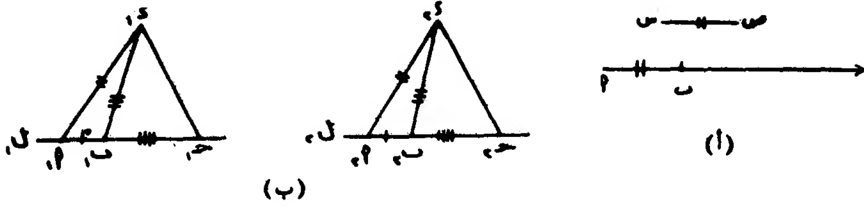
(٣) إذا كانت ت (أ، ب؛ س، ص)، ت (أ، ب؛ حـ، د) فإن ت (س، ص؛ حـ، د). أى أن $\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{س ص}}$، $\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{حـ د}} \Leftarrow \overline{\text{س ص}} \equiv \overline{\text{حـ د}}$.

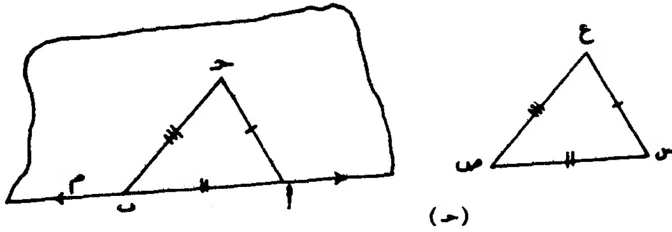
(٤) إذا كانت ب (أ$_1$، ب$_1$، حـ$_1$)، ب (أ$_2$، ب$_2$، حـ$_2$)، $\overline{\text{أ}_1\text{ب}_1} \equiv \overline{\text{أ}_2\text{ب}_2}$، $\overline{\text{ب}_1\text{حـ}_1} \equiv \overline{\text{ب}_2\text{حـ}_2}$ فإن $\overline{\text{أ}_1\text{حـ}_1} \equiv \overline{\text{أ}_2\text{حـ}_2}$. هذه البديهية تختص بجمع القطع المستقيمة.

(٥) لكل نصف مستقيم نقطة أصله أ ولكل قطعة مستقيمة $\overline{\text{س ص}}$ يوجد نقطة واحد تقع على نصف المستقيم بحيث أن $\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{س ص}}$. شكل (٣٦) أ.

(٦) معطى مستقيمان ل$_1$، ل$_2$، نقط أ$_1$، ب$_1$، حـ$_1$ $\in$ ل$_1$، د$_1$ $\notin$ ل$_1$، نقط أ$_2$، ب$_2$، حـ$_2$ $\in$ ل$_2$، د$_2$ $\notin$ ل$_2$. إذا كانت $\overline{\text{د}_1\text{أ}_1} \equiv \overline{\text{د}_2\text{أ}_2}$، $\overline{\text{د}_1\text{ب}_1} \equiv \overline{\text{د}_2\text{ب}_2}$. $\overline{\text{أ}_1\text{ب}_1} \equiv \overline{\text{أ}_2\text{ب}_2}$، $\overline{\text{ب}_1\text{حـ}_1} \equiv \overline{\text{ب}_2\text{حـ}_2}$ فإن $\overline{\text{د}_1\text{حـ}_1} \equiv \overline{\text{د}_2\text{حـ}_2}$. شكل (٣٦) ب.

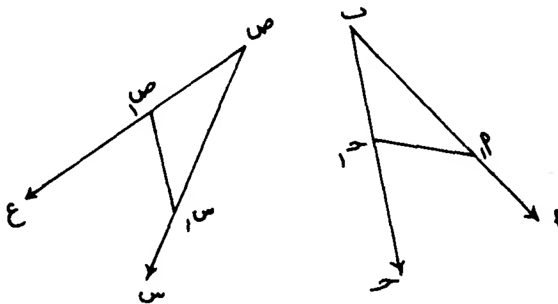
(٧) معطى نصف مستوى حدوده المستقيم م، قطعة مستقيم $\overline{\text{أب}}$ $\in$ م، مثلث س ص ع. إذا كانت $\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{س ص}}$ فإنه يوجد نقطة واحدة فقط حـ واقعة فى نصف المستوى بحيث أن $\overline{\text{أحـ}} \equiv \overline{\text{س ع}}$، $\overline{\text{ب حـ}} \equiv \overline{\text{ص ع}}$. شكل (٣٦) حـ.





شكل (٣٦)

ويلاحظ أن البديهية السادسة يمكن أن تكون نظرية في الهندسة التقليدية . على أية حال من هذه البديهيات السابقة على تطابق القطع المستقيمة يمكن أن نستنتج ونبرهن النظريات الخاصة بتطابق المثلثات وغيرها على أساس بديهى سليم مع الأخذ فى الاعتبار تطابق الزوايا . ويعرف تطابق زوايتين فى هذا النظام البديهى كما يأتى :ـ نقول أن الزوايتين أ ب حـ ، س ص ع متطابقتين اذا وجدت النقطة أ١ على ضلع الزاوية ب أ ، النقطة حـ١ على ضلع الزاوية ب حـ ، النقطة س١ على ضلع الزاوية س ص ، النقطة ع١ على ضلع الزاوية س ع بحيث أن :
أ١ب ≡ س١ص ، حـ١ب ≡ ع١ص ، أ١حـ١ ≡ س١ع١ شكل (٣٦) ء .



شكل (٣٦) ء

ويلاحظ أن هـذا التعريف كنا نعتبره نظرية فى الهندسة كما نلاحظ أنه يوجد مجموعات أخرى بديلة لبديهيات التطابق.

وعلى أية حال تقديم التطابق عن طريق الطريقة البديهة يستحسن أن يقدم للمراحل المتقدمة عندما يكون التلميذ مستعداً لها.

ذكرنا فى خلال مناقشتنا السابقة بعض الاصطلاحات والتعريفات التى قد تكون غير مألوفه للبعض (القارىء الذى لم يدرس هندسة حديثة مثلا) مثل نصف المستقيم ونصف المستوى. ولما كان من المستحب تشجيع استخدام لغة الفئات والتعود عليها فى تدريس الهندسة (وغيرها من بقية المواد الرياضية) فسوف نقدم باختصار هذ التعريفات مع تعريفات أخرى اساسية تقابلنا فى الهندسة الابتدائية بلغة الفئات ثم نحاول تفسير استخدامنا لعلاقة التطابق ورمزها «≡» فى المواضع التى كما تستخدم فيها علاقة التساوى «=» فى معالجتنا التقليدية مثل استخدام $\measuredangle$ أ ≡ $\measuredangle$ ب بدلا من $\measuredangle$ أ ≡ $\measuredangle$ ب أو $\overline{\text{أب}}$ ≡ $\overline{\text{ب حـ}}$ بدلا من $\overline{\text{أب}}$ = $\overline{\text{ب حـ}}$.

(١) فى التعريفات الآتية نعتبر سـ فئة من النقط تشير اليها بالحروف أ، ب، حـ، د.

أى سـ = { س : س نقطة، س = أ، ب، حـ، ء، أ$_1$، ب$_1$، حـ$_1$، ء$_1$، أ$_2$ ... }

وفئة جزئية من سـ هى الفصل ى عناصره مستقيمات تشير إليها بالحروف ل، ك. م، ن...

أى م = { س : س مستقيم، س = ل، م، ن، ل$_1$، م$_1$، ن$_1$ ... }

وفئة جزئية من سـ هى الفصل مـ عناصره مستويات تشير اليها بالحروف ط، ق، هـ، و.

أى مـ = { س : س مستقيم، س = ط، ق، هـ، ط$_1$، ق$_1$، هـ$_1$ ... }

عندما نقول أن النقطة أ واقعة على المستقيم ل أو المستقيم ل يمر بنقطة أ أو يحتوى نقطة أ، نعبر عن ذلك أ ∈ ل .

عندما نقول أن النقطة أ واقعة على المستقيم ط أو المستوى ط يمر بنقطة أ أو يحتوى نقطة أ نعبر عن ذلك أ ∈ ط .

عندما نقول أن المستقيم ل يقع على المستوى ط أو المستوى ط يحتوى أو يمر بالمستقيم ل، نعبر عن ذلك ل ⊂ ط .

وسنعتبر فى التعريفات الآتية أن النقطة والمستقيم والمستوى اصطلاحات أو تعاريف أولية، كما نعتبر أو علاقة البينية وعلاقة تساوى البعد التى ذكرناها فى علاقات أولية أيضا، وفيما يلى أمثلة لبعض التعريفات الهندسية .

أ ـ **القطعة المستقيمة**: يمكن تعريف القطعة المستقيمة كفئة جزئية للمستقيم كما يأتى: القطعة المستقيمة أب هى فئة النقط س بحيث أن س واقعة بين أ، ب أو تنطبق على أ أو تنطبق على حـ . أى أن:

أب = { س : ب (أ، س، ب) أو س = أ أو س = ب } أو بلغة أخرى

أب = {أ، ب} ∪ {س : ب (أ، س، ب)}

تسمى فئة النقطة التى بين أ، ب ولا تشمل على أى من أ، ب بالقطعة المستقيمة المفتوحة وهى الفئة {س : ب (أ، س، ب)}

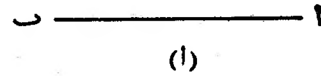
ب ـ **نصف المستقيم**: نصف المستقيم فئة جزئية من الخط المستقيم يمكن تعريفة كالآتى:

لأى نقطتين مختلفتين أ، ب فإننا نسمى الفئة ب ∪ {س : ب (أ، ب، س) } بالشعاع أب ويسمى أ برأس الشعاع . والشكل (٣٧) حـ يبين الشعاع أب، الشعاع ب أ على الترتيب .

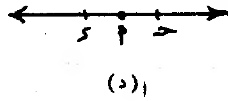
ويلاحظ أن اتحاد الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$، والشعاع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ يعطى لنا المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

واذ استبعدنا نقطة أ من الشعاع أب فإننا نسمية نصف مستقيم.

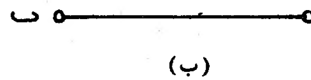
اذا كانت أ ∋ ل، كانت ب (حـ،أ،ى) فاننا نسمى الشعاعين



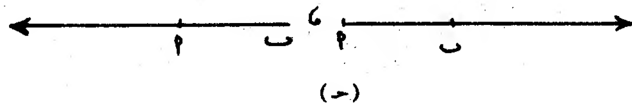
(أ)



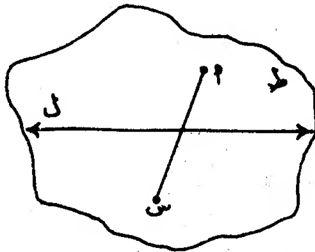
(د)



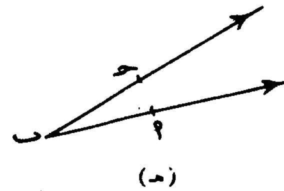
(ب)



(حـ)



(و)



(هـ)

شكل (٣٧)

أحـ، أى شعاعين متضادين ونسمى أ نقطة أصلها أو رأسها. كما فى شكل (٣٧)ى.

حـ - الزاوية: لنصفى المستقيمين المختلفين وليكونا نصفى المستقيمين أب، ب حـ بالراس المشترك ب فإننا نعرف الزاوية بأنها اتحاد نصفى المستقيمين اب، بحـ. أى أن الزاوية ∡ اب حـ هى

نصف المستقيم أب ⊔ نصف المستقيم ب حـ ــ أو اتحاد الشعاع أب ، الشعاع أحـ ــ كما فى شكل (٣٧) هـ. وتسمى ب برأس الزاوية. ويسمى نصفا المستقيمين ب أ ، ب حـ بضلعى الزاوية. يلاحظ أن الزاوية هى فئة جزئية من المستوى.

د ــ **المثلث:** هو فئة جزئية من المستوى يمكن تعريفه كما يأتى. الثلاثة نقط أ ، ب ، حـ الغير مستقيمة ، الفئة من النقط المكونة من اتحاد القطع المستقيمة أب ، ب حـ ، حـ أ هى المثلث أ ب حـ. أى أن المثلث أ ب حـ هو الفئة أب ⊔ ب حـ ⊔ حـ أ. تسمى أ ، ب ، حـ برؤوس المثلث.

هـ ــ **الدائرة:** الدائرة هى فئة جزئية من المستوى يمكن تعريفها كما يأتى. للنقطة أ وللعدد نق ، الدائرة التى نصف قطرها = نق ، مركزها أ هى الفئة { س : السمافة بين أ ، ص = نف }

و ــ **نصف المستوى:** نصف المستوى هو فئة جزئية من المستوى ط يمكن تعريفة كما يأتى:

نقول أن المستقيم ل واقع بين النقطتين أ ، ب اذا وجدت نقطة حـ ∋ ل بحيث أن ب (أ ، حـ ، ب). لأى مستقيم ل ولأى نقطة أ ∌ ل ، نسمى الفئة { س : ب (س ، ل ، أ) } بنصف المستوى الذى لايحوى النقطة أ. والفئة المكملة لها تسمى بنصف المستوى المضاد. أى أنه باستبعاد المستقيم ل من المستوى ينقسم السمتوى الى نصفى مستويين متضادين ويسمى ل بحدود نصفى المستويين. ويلاحظ أن لا ينتمى الى أى من نصفى المستويين. شكل (٣٧) و.

(٢) ان استخدام علاقة التطابق «≡» فى التقاير التى كنا نستخدم فيها علاقة التساوى «=» فى معالجتنا التقليدية هو فى الواقع محاولة وضع التعبيات المستخدمة بصورة دقيقة كما نوضحه فيا يأتى:

عندما نقول أن الفئة سـ تساوى الفئة صـ فان معنى ذلك أن كل عنصر فى سـ هو عنصر فى صـ وبالعكس كل عنصر فى صـ هو

عنصر فى سـ ونعبر عن ذلك كما نعلم سـ = صـ ⟺ س ∈ سـ ⟸ س ∈ صـ ، س ∈ صـ ⟸ س ∈ سـ

أو بالأخرى سـ = صـ ⟺ سـ ⊂ صـ ، صـ ⊂ سـ.

أى أن سـ = صـ عندما تتكون سـ ، صـ من نفس العناصر.

وعلى ذلك عندما نقول أن القطعة أب تساوى القطعة بحـ فاننا نعنى أن فئة النقط التى تكون أب هى نفسها فئة النقط التى تكون القطعة بحـ أى عندما تكون القطعتان أب و بحـ منطبقتين على بعضها ونرمز لذلك أب = بحـ.

ولكن عندما نقول أن القطعة أب تطابق القطعة ب حـ فمعنى ذلك أن بعد ب عن أ هو نفسه بعد حـ عن ب وعلى ذلك فالقطعتان المستاويتان (المنطبقتان على بعضها) تكونان متطابقين ولكن القطعتين المتطابقتين ليس من الضرورى أن تكونا متساويتين. فمثلا فى المثلث أ ب حـ يمكن أن نقول أن أب ≡ أحـ بالمفهوم الذى ذكرناه ولكن لايمكن أن نقول أم أب = أحـ. ذلك لأنه لو تساوى الضلع أ ب ، الضلع أ حـ مثلا فمعنى ذلك أن أب يكون هو نفسه أحـ ومن ثم يكون المثلث هو القطعة المستقيمة أب وهذا غير ممكن من تعريف المثلث اذ ان رؤوس المثلث الثلاثة لابد ألا تكون على استقامة واحدة.

إلا أن يمكن أن نقول بعد ب عن أ = بعد حـ عن أ للدلالة على أن أب ≡ أحـ ذلك لأن بعد ب عن أ أو بلغة أخرى طول القطعة المستقيمة أب (أو مايسمى بمقياس القطعة أب) وهو عدد حقيقى والعدد الحقيقى الذى يبين طول أ ب يمكن أن يساوى العدد الحقيقى الذى يبين طول أ حـ فاذا رمزنا بطول أ ب بالرمز م (أب) ، بطول

أحـ بالرمز P (أحـ) فيمكننا أن نقول أنه للقطعتين المتطابقتين أب ، أحـ يكون P (أب) = P (أحـ) •

وبالمثل يمكن توضيح الفرق بين أن زاوية ∢أ تطابق زاوية ∢ب وبين ∢أ تساوى زاوية ب. فمثلا ∢أ ≡ ∢ب يعنى أن مقياس زاوية ∢أ يساوى مقياس ∢ب ولكن ∢أ = ∢ب يعنى أن الزاويتين أ ، ب منطبقتان على بعضهما أو هما نفسهما واحد.

٢.٢.٤ــ النظام البديهى والبرهان الاستدلالى:

يمكن اعتبار نمو النظام البديهى للهندسة فى ذهن التلميذ على أنه عملية وضع الهندسة الحديثة فى صورة منطقية رياضية ، ولو أن الهندسة الاقليدية التى تغطى مقررات الاعدادى والثانوى (منها ما يخص المثلث ، متوازى الأضلاع ، الدوائر ، العمليات الهندسية . التشابة ، الهندسة الفراغية) هى نموذج لنظام بديهى منطقى الا أنه خلال تدرسيها (أى تدريس الهندسة الاقليدية لأكثر من ٢٠٠٠ سنة) اختفت من مادة الهندسة الفكرة الاساسية لمعالجة الهندسة بطريقة البديهات (المسلمات) وتركز تدريس الهندسة على اعطاء النظريات والتمارين .

وقد أتضح من تطور الهندسة وجود عيوب فى النظام البديهى للهندسة التى وضعها إقليدس وخلفاؤه. وقد أدى ذلك الى اختراع هندسات أخرى والى وضع هندسة اقليدس على أساس نظام بديهى خالى من عيوب النظام السابق.

• كما نعرف مقياس القطعة P هو داله تعطى لكل قطعة مستقيمة أب عدد حقيقى > صفر بحيث أن
(١) اذا كانت أ١ب١ ≡ أ٢ب٢ فان P (أ١ب١) = P (أ٢ب٢)
(٢) اذا كانت ب (أ، ب، حـ) فان P (أحـ) = P (أب) + P (بحـ)

ومن النظم البديهية الحديثة للهندسة الاقليدية ما هو لباش (١٨٨٢)، وبينو (١٨٨٩)، وهلبرت (١٩٠٠)، وفبلن (١٩٠٤)، وبيرخوف وبتلر (١٩٤٠) الا أن نظام هيلبرت هو أكثر الانظمة مشابهة لنظام اقليدس وقد وضع هيلبرت الهندسات الاقليدية واللا اقليدية والاسقاطية على أساس نظام بديهى سليم وسمى عمله قواعد أو أساسيات أو اصول الهندسة Foundations of Gesmetry — كما نعلم منهندية المسلمات (الهندسة الحديثة). أنظر ملحق (٢) لبعض نظم بديهية حديثة للهندسة الاقليدية.

وقد استفادت بعض البرامج الحديثة منذلك فأصبح الاهتمام فى تدريس الهندسة مركزاً على تكوين النظام البديهى فى ذهن للتلميذ واستخدمت نماذج بسيطة من نظم هندسية محدودة أو غير محدودة، منها نظم محدودة للهندسة الآفينية أو الاسقاطية حتى يلم التلميذ بالنظام البديهى وخواصة. أما الهندسة الاقليدية التقليدية فقد اعتبرتها وسيلة فقط لتعويد التلميذ على حل المشكلات وقد حاولت بعض البرامج تطوير الهندسة الاقليدية ببنائها على أساس بديهى سليم.

وفيما يلى نقدم فكرة عن النظام البديهى فى الهندسة وخواصه ثم نماذج من نظم بديهية تناسب المستويات المتقدمة فى المرحلة الاعدادية (أو الثانوية) وأمثلة توضيح طرق البرهنة الاستدلالية أما تطوير تدريس الهندسة الاقليدية توضيح الاساس البديهى فسنعالجة فى البند التالى ٣.٢.٤.

١ــ النظام البديهى فى الهندسة:

يتكون النظام البديهى من:

(١) اصطلاحات وعلاقات غير معرفة أو أولية مثل النقطة، المستقيم، المستوى (فى هندسة هيلبرت). وتشترط أن تكون واضحة وبسيطة مختصرة.

(٢) بديهيات (أو مسلمات) تؤخذ بدون برهان تبين خواص أساسية للاصطلاحات الغير معرفة ويجب أن تكون واضحة وبسيطة فى تركيبها ويستحسن أن يكون عددها قليل مثل بديهات الوقوع، البينية، الاستمرار (فى هندسة هيلبرت).

(٣) تكوين النظام باستنتاج نظريات من (١)، (٢) عن طريق البرهان والمنطق الرياضى. ولا يتكون النظام البديهى كفاية فى حد ذاته ولكن ليعطى فرع الرياضيات (سواء هندسة، نظرية فئات، نظرية مجموعات ...) نظام منطقى استدلالى.

ويلاحظ أن النظام البديهى قد يتضمن تعريفات تعتمد على الاصطلاحات والعلاقات الغير معرفة مثل تعريف المثلث او القطعة المستقيمة عن طريق النقط.

٢ ـ خصائص النظام البديهى:

(١) التآلف: نقول أن النظام البديهى متآلف اذا واذا فقط كان لايوجد فى النظام أى تقريرين (بديهيتين أو نظريتين او بديهية ونظرية) متعارضين. أى لايقول أحدهما أن تقريرا صحيح ويقول الآخر أن نفس التقرير خطأ.

(٢) الاستقلال: ونقصد باستقلال البديهيات أنه لايمكن استنتاج بديهية من بديهية أخرى. وهذامحبب لعدم التكرار. ومن المشوق أن نعرف أن الهندسات اللا اقليدية اكتشفت أو وضعت فى محاولة اثبات استقلال بديهية التوازى لاقليدس.

(٣) الكمال: اذا اعطينا تفسيرا لنظام بديهى باعطاء معنى للاصطلاحات والعلاقات الغير معرفة بطريقة تجعل البديهات اما صحيحة أو خطا، واذا كان التفسير يجعل فئة كل البديهات صحيحة فاننا نسمية نموذج. واذا وجد نموذج لفئة كل البديهيات فاننا نسمى هذه الفئة من البديهيات متآلفة. اذا وجد نموذجان لنظام بديهى ووجد

تناظر أحادى بين عناصرها (بحيث تحفظ العلاقات بينهما) فاننا نسمى النظام مصنفاً. وإذا كان النظام مصنفاً فاننا نقول عليه أنه نظام كامل. فمثلا نظام الهندسة المطلقة لهيلبرت نظام غير كامل ولكن النظام البديهى للهندسة الاقليدية واللا اقليدية لهيلبرت فهو نظام كامل.

٣ـ نماذج من بعض نظم بديهية:

نقدم فيا يلى بعض أمثلة لمجموعات من البديهيات يمكن بها تقديم النظم البديهية المحدودة فى المرحلة الاعدادية (أو الثانوية) وهى نماذج لبديهيات هندسات اسقاطية محدودة أو آفينية (كما فى المجموعة الرابعة الاتية)ـ وقد سبق ذكر مجموعة أخرى وهى بديهيات التطابق.

مجموعة البديهيات الأولى:

(١) يوجد مستقيم واحد يمر بأى نقطتين. أى بلغة أخرى لأى نقطتين أ، ب يوجد على الأقل مستقيم ل بحيث أن أ، ب $\ni$ ل.

(٢) كل مستقيم يحتوى على الأقل ثلاثة فقط، أى بلغة أخرى اذا كان ل مستقيم فانه يوجد على الاقل ثلاثة نقط أ، ب، حـ بحيث أن أ، ب، حـ $\ni$ ل.

(٣) يوجد على الأقل مستقيم واحد.

(٤) ليست كل النقط واقعة على نفس المستقيم أى بلغة أخرى اذا كان ل مستقيم فانه يوجد نقطة س بحيث أن س $\not\ni$ ل.

(٥) من نقطة ليست واقعة على مستقيم معلوم يوجد مستقيم واحد لايتقاطع مع المستقيم المعلوم. أى بلغة أخرى اذا كان ل مستقيم. س نقطة غير واقعة عليه فانه يوجد على الأقل وعلى الأكثر مستقيم واحد م ماراً بالنقطة س بحيث لايوجد بين المستقيمين ل، م نقطة مشتركة أى ل $\sqcap$ م $= \phi$.

مجموعة البديهيات الثانية :

(١) اذا كانت س ، ص أى نقطتين فانه يوجد مستقيم واحد فقط يحتوى كلا من س ، ص .

(٢) اذا كان ل مستقيم فانه يوجد على الأقل ثلاث نقط واقعة عليه .

(٣) اذا كان ل مستقيم فانه يوجد نقطة س ليست واقعة عليه .

(٤) اذا كان ل ، م أى مستقيمين فانه يوجد على الأقل نقطة س واقعة على كل من ل . م .

مجموعة البديهيات الثالثة :

هى المجموعة الثانية بحذف البديهية (٥)

مجموعة البديهيات الرابعة :

(١) لأى نقطتين س ، ص يوجد مستقيم واحد ل بحيث أن س ، ص ∈ ل .

(٢) يوجد على الأقل ثلاثة نقط س ، ص ، ع بحيث لايوجد مستقيم ل و يكون س ، ص ، ع ∈ ل .

(٣) لأى نقطة س ولأى مستقيم يوجد مستقيم واحد م بحيث أن م يمر بنقطة س . م // ل .

ويمكن اعطاء تفسير للنظم البديهية بأشياء قريبة من ذهن التلميذ كاعطاء معنى للنقطة بعضو فى جمعية أو فرد فى عائلة ، معنى للمستقيم بيوم عطلة ، معنى للمستوى بمكان لنزهة معينة واعطاء معنى س نقطة واقعة على مستقيم ل بالمعنى س فى عائلة فلان يقوم برحلة فى يوم العطلة ل بواسطة عربة فلان . واعطاء س واقعة على المستوى ط بالمعنى فى عائلة فلان يقوم بزيارة مكان النزهة ط المحبب اليه . ومن ثم يمكن تكوين نموذج لفئة البديهيات يكون قريبا من ذهن التلميذ .

ولتكوين نظام بديهي لأى من المجموعات السابقة نساعد التلميذ (عندما يكون مستعداً للبرهان المنطقى) على برهنة النظريات الخاصة بهذا النظام باستخدام المنطق والبرهان الرياضي. أى نشجعه على برهنة النظريات باستخدام طرق البرهنة التى ذكرناها فى الباب الاول وخاصة البرهان المباشر والبرهان بعكس المعكوس أو التناقض. وفيما يلى نقدم بعض أمثلة لنظريات خاصة بالمجموعة الثالثة من البديهيات السابقة وبرهنتها إما بالطريقة المباشرة أو بعكس المعكوس أو بالتناقض.

نظرية (١) المستقيمان المختلفان يوجد بينهما نقطة مشتركة على الأكثر. أى اذا كان ل، م مستقيمان مختلفين فانه يوجد على الأكثر نقطة واحدة فقط س فى تقاطعهما.

البرهان (بالتناقض): نفرض أنه يوجد مستقيمين ل، م لهما على الأقل نقطتان مشتركتان س، ص. ولكن هذا يخالف بديهية (١). اذاً لابد أنه يوجد نقطة واحدة فقط على الأكثر مشتركة بين مستقيمين مختلفين.

نظرية (٢) يوجد ثلاثة مستقيمات مختلفة.

البرهان: من بديهية (٤) يوجد مستقيم ل. من بديهية (٢) يوجد ثلاثة نقط عليه س، ص، ع. من بديهية (٣) يوجد نقطة ز ∉ ل.. من بديهية (١) يوجد مستقيمات تمر بكل زوج من النقط وهى المستقيمات س ز، ص ز، ع ز؛ هذه المستقيمات مختلفة. إذ أنه لو انطبق اثنان منها على بعض وليكن المستقيم ع ز= المستقيم ص ز فانه يوجد مستقيمان س ص ع، ز ص ع يحتويان ص، ع أى بينهما نقطتان مشتركتان وهذا يخالف نظرية (١). وعلى ذلك فانه يوجد ثلاثة مستقيمات مختلفة ــ لاحظ أننا استخدمنا البرهان بالتناقض فى الجزء الأخير من النظرية.

نظرية (٣): ليست كل المستقيمات مارة بنفس النقطة أى اذا كانت س نقطة فانه يوجد مستقيم ل بحيث أن س ∉ ل .

نقدم برهانين لهذه النظرية أحدهما برهان مباشر والآخر برهان بعكس المعكوس. البرهان (المباشر): من البديهيتين (٢)، (٤) يوجد ثلاثة نقط. وعلى ذلك يمكن أن نفترض أنه يوجد نقطتين س،ص من بديهية (١) يوجد مستقيم ل يحتوى س،ص أى س،ص ∈ ل. من بديهية (٣) يوجد نقطة ع ∉ ل. من بديهية (١) يوجد مستقيم م يمر بالنقطتين ص،ع. وحيث أن ع ∉ ل فإن ل،م يكونان مستقيمان مختلفين. اذا وقعت س على م (أى س ∈ م) فانه يوجد مستقيمان مختلفان لهما نقطتان مشتركتان وهذا يخالف بديهية (١). وعلى ذلك فانه يوجد مستقيم م لايحتوى نقطة س.

البرهان (بعكس المعكوس): بفرض أن كل المستقيمات تمر بنقطة س. من نظرية (٢) يوجد على الأقل مستقيمان ل،م. لكى يمر ل،م بالنقطة س ويكونان مختلفين يجب ألا يحتويان نقط أخرى مختلفة عن س تكون مشتركة بينهما تبعا لنظرية (١). ومن ثم يمكن أن نقول أن النقطتين س،ص ∈ ل، والنقطتين س،ع ∈ م. من بديهية (١) يوجد مستقيم وليكن المستقيم ك يمر بالنقطتين ص،ع؛ ومن فرضنا يحتوى النقطة س. أى أن المستقيم ك المختلف عن أى من المستقيمين ل،م يشترك مع أى من ل،م فى نقطتين مختلفتين (س،ص مع ل؛ س،ع مع م). وهذا يخالف نظرية (١) وعلى ذلك فرضنا الذى يقول أن كل المستقيمات تمر بنقطة س خطأ ويجب أن ننفيه. أى لابد أنه يوجد مستقيم لايمر بنقطة س.

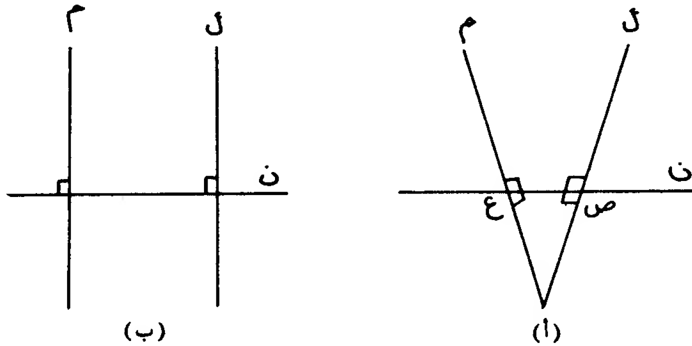
٤ـ البرهان الاستدلالى:

تكلمنا فى الباب الأول عن طرق للبرهنة وكلها ماعدا الأخيرة تسمى طرق البرهنة الاستدلالية. وطرق البرهنة الاستدلالية غير الطريقة المباشرة كالبرهان بعكس المعكوس أو بالتناقض أو بالحذف أو

بنفى النفى يسميها البعض طرق البرهنة غير المباشرة. وقد ذكرنا أمثلة للبرهنة الاستدلالية المباشرة وغير المباشرة فى البند السابق الخاص بنماذج النظم البديهية. وحيث أنه يوجد مواقف كثيرة فى هندسة المرحلة الاعدادية (أو الثانوية) عندنا يمكن أن نطبق فيها طرق البرهنة غير المباشرة فانه يجب أن نساعد ونشجع التلميذ على استخدام طرق البرهنة غير المباشرة حتى لايقتصر على استخدام الطرق المباشرة التى تعود عليها. ومن ثم فإننا نقدم فيما يلى بعض الأمثلة للنظريات التى يمكن برهنتها بالطرق غير المباشرة. ولما كان تخطيط البرهان له أهمية فى التفكير الخاص بالبرهنة فإننا نقدم أيضاً هنا فكرة أوسع من التى قدمناها سابقاً فى الباب الأول مع ذكر أمثلة لتوضيحه فى الهندسة والجبر.

(ا) أمثلة لبرهنة بعض النظريات بالطرق غير المباشرة:

(أ) **نظرية:** المستقيمان المستويان والعمودان على مستقيم ثالث فى نفس مستواهما يكونان متوازيين. أى اذا كان المستقيمان ل،م عموديين على المستقيم ل وكانت المستقيمات ل،م،ن مستوية فإن ل // م.



شكل (٣٨)

البرهان غير المباشر (بالتناقض) نفرض أن ل ∦ م فان ل،م يتلاقيان فى نقطة ولتكن النقطة س. أى أنه من نقطة س يوجد

مستقيمان ل، م عموديين على مستقيم ثالث ن. وهذا غير ممكن (لأنه سيتكون مثلث س ص ع مجموع زواياه أكثر من ١٨٠°. شكل (٣٨)أ).
وعلى ذلك لايمكن أن يكون ل ∦ م. أى أنه لابد أن ل // م شكل (٣٨) ب.

(ب) نظرية: اذا تساوت زوايتا القاعدة فى مثلث كان المثلث متساوى الساقين (له ضلعان متطابقان) أى اذا كان أ ب حـ مثلث فيه ∢ ب ≡ ∢ حـ فان $\overline{أب}$ ≡ $\overline{أحـ}$.

البرهان غير المباشر (بعكس المعكوس): بغرض أن طول أ ب ≠ طول أ حـ.

فان $\overline{أب}$ > $\overline{أحـ}$ أو $\overline{أحـ}$ > $\overline{أب}$

بفرض أن $\overline{أب}$ > $\overline{أحـ}$ فإن ∢ حـ > ∢ ب.

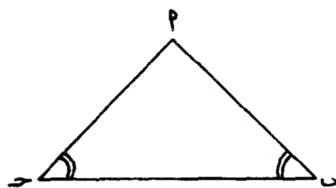
وهذا يناقض المعطى الذى يقول أن ∢ ب ≡ ∢ حـ.

اذا لابد أن $\overline{أب}$ ≯ $\overline{أحـ}$. (أى $\overline{أب}$ ليست أقل من $\overline{أحـ}$) (١)

بفرض أن $\overline{أحـ}$ > $\overline{أب}$ فإن ∢ ب > ∢ حـ. وهذا يناقض المعطى الذى يقول أن

∢ ب ≡ ∢ حـ. وعلى ذلك لابد أن $\overline{أحـ}$ ≯ $\overline{أب}$ (٢)

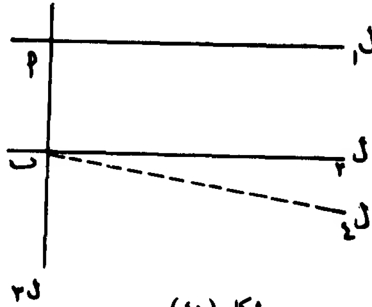
من (١)، (٢) لابد أن يكون $\overline{أب}$ ≡ $\overline{أحـ}$.



شكل (٣٩)

(حـ) نظرية: اذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستقيمين متوازيين فى مستواهما فيكون عموديا على الآخر. أى اذا كانت $ل_١$، $ل_٢$، $ل_٣$ ثلاثة مستقيمات مستوية، $ل_١$ // $ل_٢$، $ل_٣$ ⊥ $ل_١$ فان $ل_٣$ ⊥ $ل_٢$.

البرهان غير المباشر (بالتناقض): نفرض أن $ل_٣$ غير عمودى على $ل_٢$. من نقطة ب (أنظر شكل ٤٠) وفى نفس مستوى المستقيمات نرسم مستقيم $ل_٤$ بحيث أن $ل_٤ \perp ل_٣$ وعلى ذلك فانه يوجد مستقيمان يمران بنقطة ب و يوازيان المستقيم $ل_١$ وهذا غير ممكن لأنه يناقض بديهية التوازى (التى تقول أنه لايمكن رسم من نقطة خارج مستقيم معلوم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم). وعلى ذلك لابد أن يكون $ل_٣ \perp ل_٢$.



شكل (٤٠)

و يلاحظ أنه فى طرق البرهنة غير المباشرة التى استخدمناها فى الأمثلة السابقة منها البرهان بالتناقض أو بعكس المعكوس. وعادة يفضل التلميذ (و يساعده فى ذلك المدرس) البرهان بالتناقض (أو الحذف) لأنه غير متعود على البرهان بعكس المعكوس. ويجب على المدرس أن يشجع التلميذ على البرهان بعكس المعكوس كلما أمكن وذلك لأن البرهان بالتناقض أو الحذف يؤدى الى مايأتى:ـــ

(١) قد يحدث أن الوصول الى التناقض يكون ناتجاً من استنتاج خاطىء فى الخطوات الأولى وليس لعدم توافق المعطى مع نفى المطلوب.

(٢) حتى اذا كان الوصول الى التناقض الأخير سليما فهذا البرهان يعطى بصيره قليلة فى الربط بين المعطى والمطلوب فى حين أن الطريقة المباشرة أو بعكس المعكوس تعطى سلسلة من المناقشات تربط المعطى بالمطلوب.

٥ ــ تخطيط البرهان :

كثير من نظريات وتمارين هندسة المرحلة الاعدادية بسيطة وتتطلب براهين قصيرة وواضحة ، الا أن بعضها يحتاج الى براهين أطول . وفى بعض الأحيان عندما لايكون من المؤكد أن الطريقة واضحة بطريقة حدسية فان التلميذ يجد صعوبة من البداية فى اكتشاف الخطط الموصلة للبرهان . ومن ثم فان تخطيط البرهان له أهمية كبيرة دائما سواء فى الحالات البسيطة أو غير البسيطة . وكلما كان البرهان بسيطاً كلما زادت الأهمية للتلميذ ليعمل التخطيط بنفسه كاملا فى ذهنه حتى يتعود على ذلك حتى فى البراهين الصعبة ، ويمكن أن يستعين التلميذ برسم اسكتش قبل أن يبدأ كتابة البرهان (للنظرية أو التمرين) .

وفى الأحوال التى يجد التلميذ صعوبة فى البداية أو يكون غير قادراً على عمل الخطة الموصلة الى النتيجة أو المطلوب قد يكون من المساعد أن يأخذ النظرية أو التمرين كما لو أنه بالعكس .

فمثلا اذا كانت فئة من المعطيات تؤدى الى نتيجة ما فان النتيجه تكون مؤداه بواسطة أى تأتى من أو ناتجة من هذه المعطيات بافتراض أن هذه النتيجة صحيحة ، نسأل تحت أى ظروف تكون صحيحة أو أى شيء يؤدى الى أن تكون صحيحة . وبهذا فاننا نسير فى سلسلة من « يأتى من » (أو مؤدى بواسطة) نصل بها من النتيجة (أو المطلوب) الى المعطيات . واذا كان من الممكن أن نقوم بهذا ، فحيث أن النتيجة موصلة بهذه السلسلة من « يأتى من » (أو مؤدى بواسطة) فانه ينتج عكسيا أن المعطيات متصلة بسلسلة من « يؤدى الى » الى النتيجة المطلوبة وبهذا يكتمل البرهان . وبعكس ترتيب الخطوات تصل الى ما نسميه بالبرهان التركيبى (كما ذكرنا فى الباب الأول) .

ويمكن وصف التخطيط التحليلي والتركيبي كما يأتي ؛ حيث أ، ب، ...م، ن تقارير صحيحة.

التخطيط التحليلي: المطلوب ⇐ أ ⇐ ب ⇐ م ⇐ ن ⇐ المعطيات.

التخطيط التركيبي: المعطيات ⇐ ن ⇐ م ⇐ ب ⇐ أ ⇐ المطلوب.

أي أننا في التخطيط التحليلي نبحث عن الوصول الى المطلوب من المعطيات بطريقة عكسية، ونلاحظ أن التخطيط التحليلي يساعد على اكتشاف النتائج وتحقيقها الا أن التخطيط التحليلي لايكون برهانا ولكن عندما تكتمل خطوات التخطيط التحليلي وبعكسها نحصل على البرهان التركيبي الذى يمكن كتابته كبرهان بالطريقة المباشرة.

وقد استعملنا العلامة ⇐ (لتعني تؤدى الى) أما العلامة ⇐ (فتعني ناتجة من) أو يأتي من أو مؤداه بواسطة أو ناتجة من.

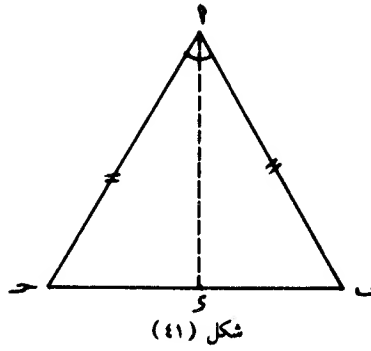
ولتوضيح الطريقة التحليلية في تخطيط البرهان نأخذ المثالين الآتيين أحدهما في الهندسة الآخر في الجبر.

(١) نظرية: اذا كان المثلث متساوى الساقين فان زاويتي القاعدة تكونان متساويتين (أو بالأخرى متطابقتين) أي اذا كان $\overline{أب} \equiv \overline{أحـ}$ في △ أ ب حـ فإن ∢ ب ≡ ∢ حـ.

الطريقة التحليلية في تخطيط البرهان يمكن أن تسير كما ياتى (من المعلومات التقليدية).

(أ) بأى طريقة يمكن أثبات أن زاويتين متساويتان (أو بالأخرى متطابقتان)؟ من ضمن الطرق لكى تكون الزاويتان متساويتين أن تكونا الزاويتان متناظرتين في مثلثين متطابقين.

(ب) هل من الممكن أن نكون مثلثين متطابقين؟



شكل (٤١)

حيث أن $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أحـ}}$ من المعطيات فانه يمكن أن نرسم منصف ∢أ ويكون لدينا المثلثين المتطابقين ب أ ى ، حـ أ ى كما فى شكل (٤١).

(٢) مثال: أثبت أنه إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ع}}$

فإن $\frac{\text{أ}^2}{\text{س}^2} = \frac{\text{أب} + \text{حـ}^2}{\text{س ص} + \text{ع}^2}$ (بحيث أن $\text{س ص} + \text{ع}^2 \neq$ صفر)

نقدم الطريقة التحليلية والتركيبية لتخطيط البرهان لهذا المثال.

الطريقة التحليلية: النتيجة تكون صحيحة عندما يكون

$\text{أ}^2 (\text{س ص} + \text{ع}^2) = \text{س}^2 (\text{أب} + \text{حـ}^2)$

أى عندما يكون $\text{أ}^2 \text{س ص} + \text{أ}^2 \text{ع}^2 = \text{س}^2 \text{أب} + \text{س}^2 \text{حـ}^2$

أى عندما يكون أس (أص) + $(\text{أع})^2 =$ أس (س ب) + $(\text{س حـ})^2$

وهذا صحيح لأنه من المعطيات

أ ص = س ب، أ ع = س حـ.

الطريقة التركيبية: أص = س ب ، أع = س حـ من المعطيات

وهذا يؤدى الى أس (أص) + $(\text{أع})^2 =$

أس (س ب) + (س حـ)^{٢}

وهذا يؤدى الى أ^{٢} س ص + أ^{٢}ع^{٢} = س^{٢} أ ب + س^{٢} حـ^{٢}

وهذا يوؤدى الى أ^{٢} (س ص + ع^{٢}) = س^{٢} (أ ب + حـ^{٢})

وهذا يؤدى إلى $\frac{أ^{٢}}{س^{٢}} = \frac{أ ب + حـ^{٢}}{س ص + ع^{٢}}$

ويلاحظ أنه يوجد برهان آخر مباشر غير المكتوب بالطريقة التركيبية السابقة

يأتى من وضع $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{ص} = \frac{حـ}{ع} =$ ك

والتعويض يقيم أ، ب، حـ فى الطرف الأيمن أو الايسر والمطلوب كما هو مألوف. الأ أنه فى هذا المثال يكون التفكير بالطريقة التحليلية او التركيبية السابقة لها دلالة وأهمية فى نمو التفكير والبرهان الرياضى فى ذهن التلميذ.

٣.٢.٤ ــ تطوير تدريس الهندسة الاقليدية بتوضيح الاساس البديهى السليم

تغير وضع الهندسة فى البرامج المطورة فلم تعد تعطى كمادة مستقلة لها نفس الوزن (كما ذكرنا فى بند ٣.٥.٢ بالباب الثانى)، كما تغير أيضا شكلها ونوعها وأسلوبها فاختفت الهندسة (الاقليدية) من معظم هذه البرامج واستعيض عنها بمداخل فى هندسة التحويلات أو هندسة المتجهات أو هندسة الاحداثيات ... أو أنظمة لهندسات مختلفة (آفينية ــ اسقاطية ــ لا اقليدية ...). ألا أن بعض البرامج المطورة احتفظ بشكل الهندسة الاقليدية وطور تدريسها بوضعها على أساس بديهى سليم، وذلك بتعديل وتبسيط النظم البديهية الحديثة للهندسة الاقليدية خاصة نظام هيلبرت ونظام بيرخوف (أنظر ملحق «٢»).

وبالطبع إدراج الهندسة الاقليدية أو عدم ادراجها فى البرامج المدرسية

لها مؤيدوها (ومنهم شيباتا) ومعارضوها (ومنهم فرويد نتال) الكثيرون.

ولكنني لا أغالي اذا قلت أن التلميذ المصرى بصفة خاصة عنده الحس والحماس للهندسة منذ التفوق الهندسى لقدماء المصريين. وهو فى حاجة الى أن ننمى ونقوى فيه هذه المقدرة بدلا من اخمادها. ولذا فهو في حاجة الى أن يتعرف على الصور والأشكال والأنواع والأساليب المختلفة للهندسة. وقد تبين بالتجربة أنه قادر على التمكن من شكل جديد للهندسة مثل التوبولوچى الهندسى اذا قدم له بطريقة تنمى الحدس والجمال الهندسى، والتجريد والاستنتاج (الاستدلال المنطقى) باستخدام الطريقة البديهية، والابتكار، والاكتشاف. وهو قادر أيضا على استيعاب الهندسة الاقليدية المبنية بالاسلوب البديهى (الذى اقترحه شيباتا وذكرناه فى بند ٣.٥.٢ بالباب الثانى).

وعلى ذلك فإننى أرى أهمية لتدريس الهندسة الاقليدية على أساس بديهى سليم بجانب الصور والأنواع الأخرى للهندسة.

فيما يلى نوضح بعض أفكار عامة فى تطوير تدريس الهندسة الاقليدية ثم مدخل للهندسة الاقليدية بالاسلوب البديهى الحديث فى البرامج المطورة بأسلوب مبسط يناسب التاميذ فى المراحل المبكرة.

١ ـ أفكار عامة فى تطوير تدريس الهندسة الاقليدية:

(١) استخدام بعض التعبيرات بدقة والتميز بين:

(أ) القطعة المستقيمه (أو ضلع من أضلاع شكل مضلع) وطولها. فمثلا يجب أن يعرف التلميذ أن القطعة المستقيمة هى فئة من النقط (كما عرفناها فى البند السابق) ولكن طولها (قياسها) دالة (تعطى لكل قطعة مستقيمة عدد حقيقى ≥٠، ...).

(ب) القطعة المستقيمة والمستقيم. بتعريف القطعة المستقيمة كفئة جزئية من مستقيم... وأخذ المستقيم كإصطلاح غير معرف.

(حـ) المضلع وداخليته. فمثلا المثلث هو ثلاثة أضلاع، ولكن الورقة التى على شكل مثلث (أو المنطقة المثلثة) هى مثلث مع داخليته. يمكن ايجاد محيط مثلث ولكن لايمكن ايجاد مساحة مثلث، ففى الواقع أننـــا يمكن ايجاد مساحة المنطقة المثلثة وليس مساحة المثلث (كما كنا نعبر بغير دقة).

(د) الشكل الهندسى المستوى ومساحته. فمثلا المربع هو فئة النقط التى تكوّن أضلاعة ولكن مساحة المنطقة المربعة (المربع وداخليته) هو دالة.

(هـ) الزاوية ومقياسها (قياسها) فالزاوية هى فئة من النقط تكون ضلعاها ومقياسها دالة.

(و) التساوى والتطابق (كما بينا فى البند السابق).

(ز) المستقيم والمحور (فالمحور هو مستقيم مزود بنقطة أصل ووحدة قياس وأتجاه موجب واتجاه سالب). والفرق بين النقطة واحداثيها (فالنقطة اصطلاح غير معرف واحداثيها دالة).

٢ــ استخدام توضيحات من هندسة الاحداثيات ومزج الهندسة المستوية مع الفراغية.

٣ ــ استخدام لغة الفئات.

٤ــ عدم تقديم التعريفات والبديهات مرة واحدة. فمثلا لا تقدم كل البديهات أو حتى أى مجموعة بديهيات لعلاقة معينة مرة واحدة. ولكن بالتدريج.

٥ــ تقديم فكرة عن البرهان المنطقى وأنواعه فى وحدة خاصة أو بالتدريج عند اللزوم.

٦ــ الاستعانة بالاشكال والحدس فى التدريج للوصول الى المفاهيم المجردة.

٧ــ استخدام طريقة شيباتا (غير الرسمية) فى تطوير تدريس

الهندسة الاقليدية حتى فى البرامج التقليدية (كما ذكرنا فى الباب الثانى بند ٣.٥.٢). وذلك بأن نبدأ بما هو مألوف فى الكتاب المدرسى وبالرجوع خطوة خطوة الى الوراء. فمثلا العلاقة أو الخاصية أو النظرية (٣) أتت من نظرية (٢) وهذه من... وهذه من... حتى تصل الى بديهية تعتمد عليها ونعطى فرصة للتلميذ بأن يتعرف عليها أو يكونها (مع اعطاء نبذه تاريخية عنها سواء أكانت لاقليدس أو هيلبرت أو...). وقد أمكن تدريس هندسة الصف الثانى الاعدادى بمدارس أزهرية عندنا بهذه الطريقة. واستطاع التلميذ أن يتوصل الى بعض بديهيات الوقوع incidence والترتيب (الخاصة بعلامة البينية على مستقيم) وبديهية پاش وبديهية التوازى وبديهيات التطابق (الخاصة بعلامة تساوى البعد) لنظام هيلبرت للهندسة الاقليدية. وبها أمكن بناء المقرر على أساس بديهى.

٨ــ توظيف التطبيقات (التمارين) بتدرج فى التمهيد لتقديم المفاهيم والنظريات مع اتاحة الفرصة للتلميذ بالاشتراك عن طريق أنشطة موجهة لكى يكتشف النظريات قبل اثباتها بالبرهان المنطقى. (وقد ظهر فاعلية هذه الطريقة فى الدراسة الخاصة باستخدام طريقة شيباتا المذكورة فى النقطة السابقة).

٢ــ مدخل مبسط للهندسة الاقليدية بأسلوب بديهى:

هذا المدخل يناسب تلميذ المرحلة الاعدادية ويغطى محتوى هندسة المرحلة الاعدادية على أساس بديهى سليم. ويستخدم تعديلا مبسطا لبديهيات بيرخوف وبديهيات مجموعة SMSG للهندسة الاقليدية بأسلوب واضح ودقيق متدرجا من الأسهل والبسيط. نقدم فيما يلى فكرة سريعة عن هذا المدخل:

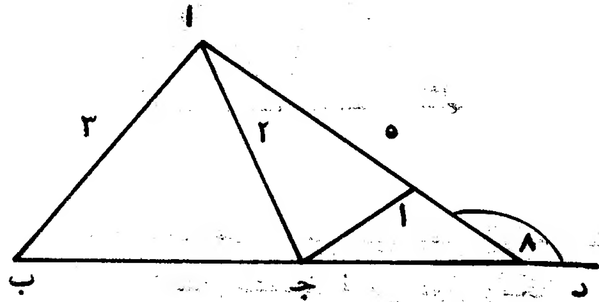
١ــ يُقدم فى البداية الاصطلاحات غير المعروفة ومنها النقطة والمستقيم وعلاقة البينية، وبعض تعريفات للمفاهيم البسيطة لمكونات الأشكال الهندسية مثل:

(أ) القطعة المستقيمة أب كفئة من النقط تقع بين أ، ب مع أ، ب.

(ب) الشعاع كفئة من النقط تتكون من اتحاد نقطة ثابتة وكل نقط مستقيم واقعة في جانب واحد من النقطة الثابتة. ثم الشعاعين المتضادين.

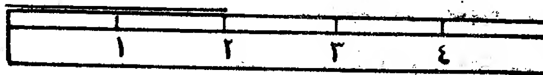
(حـ) الزاوية كاتحاد شعاعين لهم نقطة نهائية مشتركة.

ثم يتدرب التلميذ على قراءة وتحديد هذه المفاهيم لأشكال مثلثات ومتوازيات أضلاع ومضلعات بها خطوط متقاطعة. كقراءة القطع المستقيمة والزوايا المرقمة فى الشكل وكتابة المستقيم ٥ بخمس طرق.



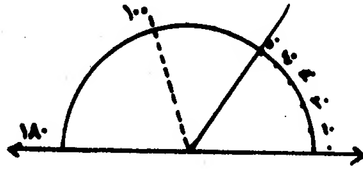
٢ ــ تقديم المقياس (القياس):

(أ) مقياس (طول) القطعة المستقيمة باستخدام خط الاعداد وبالاستعانة بالمسطرة، وذلك بجعل احداثيات احدى النقطتين النهائيتين للقطعة المستقيمة صفر واحداثيات النقطة الأخرى تسمى مقياس القطعة المستقيمة.



ثم نقدم النقطة المنصفة للقطعة المستقيمة كنقطة تقسمها إلى قطعتين لها نفس المقياس، والمستقيم المنصف الذى يمر بالنقطة المنصفة. ويوضح أن المستقيم المنصف يمكن أن يكون بأى ميل على القطعة المستقيمة وأنه يستحيل ايجاد منصف مستقيم أو شعاع.

(ب) مقياس الزاوية: يقدم كإحداثى على نصف دائرة أو قوس مدرج من ٠ إلى ١٨٠ وبالاستعانة بالمنقلة. بوضع الزاوية بحيث يكون ضلعها (الابتدائى) على الشعاع و أ والضلع الثانى يتقاطع مع نصف الدائرة فى نقطة إحداثيها يعين مقياس الزاوية. ثم تقدم الزاوية القائمة، والمستقيمة، والحادة، والمنفرجة، والزاويتين المتتامتين والمتكاملتين على أساس مقياس الزاوية ... ويقدم منصف الزاوية بعد تقديم داخليتها، كشعاع يمر بداخلية الزاوية نقطته النهائية عند رأس الزاوية ويقسمها إلى زاويتين مقياسهما متساوى. ثم يتدرب



التلميذ على ايجاد والتعرف على المفاهيم التى توصل إليها عن طريق المقياس فى أشكال لأقطار متقاطعة فى دوائر وأشكال رباعية ومثلثات ....

(حـ) تطابق الزوايا والقطع المستقيمة عن طريق المقياس. فالزاويتان (أو القطعتان المستقيمتان) تكونان متطابقتين إذا كانا لهما نفس المقياس. ومن ثم يعرف منصف القطعة المستقيمة (أو الزاوية) على أنه يقسمها إلى قطعتين (أو زاويتين) متطابقتين. و يقدم رمز التطابق ≡. ثم يدرب التلميذ على مفهوم التطابق هذا على أشكال عديدة تحتوى على قطع مستقيمة وزوايا متطابقة، و يدرب التلميذ على الاستنتاج على أساس التعريف ومعكوسه.

٢ — تقديم بديهيات أساسية، استخدمت بطريقة حدسية غير رسمية فى التوصل للمفاهيم السابقة، وهى تخص المستقيم ووقوع النقط عليه وعلاقة البينية والقياس؛

بديدية (١) : يمكن أن يمتد المستقيم فى آى من اتجاهيه .

بديهة (٢) : لأى نقطتين على مستقيم يوجد نقطة بينهما .

بديهة (٣): يوجد تناظر أحادى بين النقط الواقعة على مستقيم وبين الأعداد الحقيقية .

بديهة (٤) : يوجد خط مستقيم واحد يصل بين نقطتين .

٤ — تقديم مجموع وفرق (طرح) قطعتين (أو زاويتين)

أب + ب حـ = أحـ (حيث ب بين أ، حـ)

أب — ب حـ = أحـ (حيث حـ بين أ، ب) .

مع ملاحظة أنه بالنسبة للزوايا لا يمكن جمع زاويتين إلا إذا كان قاطعهما ضلع لأى من الزاويتين يمر بداخليتهما .

٥ — تقديم بديهيات الجمع والطرح، والضرب والقسمة (على القطع المستقيمة أو الزوايا)، وعلاقة التساوى، والتضمين المنطقى، يتدرج على فترات مع اعطاء تدريب على كل منها .

بديهية (٥) :أ = ب ، حـ = ى ⟸ أ + حـ = ب + ى

بديهية (٦) :أ = ب ، حـ = ى ⟸ أ — حـ = ب — ى

بديهية (٧) :أ = ب ، حـ = ى ⟸ أ حـ = ب ى

بديهية (٨) :أ = ب ، حـ = ى ⟸ أ/حـ = ب/ى

حيث أ، ب، حـ، ى مقياس قطعة مستقيمة أو زاوية . وإذا مثلناها بقطعة مستقيمة (أو زاوية) نستبدل علامة التساوى = بعلامة التطابق ≡ .

فمثلا أب ≡ حـ ى ، ب حـ ≡ ى هـ ⟸ أب + ب حـ ≡ حـ ى + ى هـ .

بديهية (٩): أ = أ (عاكسة)، أ = ب ⟸ ب = أ (ابدالية)، أ = ب ، ب = حـ ⟸ أ = حـ (ناقلة) .

بديهية (١٠): م ⟸ ن ، باعطاء م ، وتكون صواب فان ن الصواب تنتج .

ويتدرب التلميذ على استخدام هذه البديهيات بالاستعانة بأشكال فيها منصفات أو مستقيمات متقاطعة فى أشكال مضلعة ومثلثات ودوائر.

٦ ــ تعطى نظريات بسيطة على أساس البديهيات السابقة مع توضيح كل خطوة فى البرهان.. فمثلا لإثبات النظرية: إذا كانت الزاويتان قائمتين فانهما يكونان متطابقين

معطى: ∡ أ زاوية قائمة، ∡ب زاوية قائمة

المطلوب: ∡ أ= ∡ب

	التقرير		الأسباب
البرهان:	∡ أ زاوية قائمة	١	معطى
	مقياس ∡أ = ٩٠	٢	تعريف الزاوية القائمة
	∡ ب زاوية قائمة	٣	معطى
	مقياس ∡ب = ٩٠	٤	مثل ٢
	مقياس ∡أ = مقياس ∡ب		الخاصية الانتقالية للتساوى
	∡ أ ≡ ∡ب		عكس تعريف تطابق زاويتين

ثم تعطى النظريات الخاصة بالزوايا المستقيمة المتطابقة، وبالزوايا المتكاملة والمتتامة، وبالزوايا المتقابلة بالرأس... ويعطى التلميذ تطبيقات (تمارين) بسيطة متدرجة معظمها أجزاء من التمارين الموجودة فى مقرراتنا.

٧ــ تقديم تطابق المثلثات:

يُمهد لتطابق المثلثات بتطابق مكوناتها من قطعة مستقيمة (أضلاع) وزوايا كما بينا فى نقطة ٢ــحـ السابقة. ثم يقدم تطابق المثلثات عن طريق تطابق الأشكال الرباعية، وبعد ذلك تقدم بديهيتين لتطابق المثلثات عن طريق ضلعين وزاوية محصورة، وعن طريق زاويتين وضلع محصور. نلاحظ أنه فى الهندسة الاقليدية كنا

نعتبر هاتين البديهيتين نظريتين. ولكن التوصل إليها كان عن طريق برهان غير سليم لأنه يعتمد على عمليات غير رياضية مثل تصور أخذ أحد المثلثين ووضعه على المثلث الآخر بشرط ... فلا توجد عملية رياضية تنقل مثلث على مثلث دون أن تنقل باقى نقط المستوى، كما أن هذا البرهان يعتمد على بديهية لتطابق الزوايا لم يذكرها اقليدس.
وعلى ذلك فإن تقديم تطابق المثلثات فى هذا المدخل يقوم على:

(أ) تقديم تعريف المضلع كاتحاد فئة من النقط $أ_{١}$، $أ_{٢}$، $أ_{٣}$، ... $أ_{ن-١}$، $أ_{ن}$ مع فئة القطع المستقيمة $\overline{أ_{١}أ_{٢}}$، $\overline{أ_{٢}أ_{٣}}$، ...، $\overline{أ_{ن-١}أ_{ن}}$، $\overline{أ_{ن}أ_{١}}$ بحيث يكون تقاطع أى قطعتين مستقيمتين أحد النقط $أ_{١}$، $أ_{٢}$، .. $ا_{ن}$.

ثم تقديم الرؤوس المتناظرة والأضلاع المتناظرة لمضلعين مع تدريب التلميذ عليها.

(ب) تقديم تعريف المضلعين المتطابقين (عن طريق الأضلاع المتناظرة المتطابقة والزوايا المتناظرة المتطابقة. ثم توضيح أنه يوجد على الأقل تناظر واحد بهذا الشرط).

(حـ) يعرف المثلث بأنه مضلع له ثلاثة أضلاع.
ويطبق تعريف تطابق المضلعين على تطابق المثلثين، ليتبين للتلميذ أنه لكى نثبت أن مثلثين متطابقين باستخدام عكس تعريف تطابق مضلعين فيلزم أن يكون الثلاثة أضلاع المتناظرة متطابقة والثلاثة زوايا المتناظرة متطابقة. أى يكون الستة أزواج للأجزاء المتناظرة متطابقة.

(د) تقديم بديهيات تطابق المثلثات:
تتاح الفرصة للتلميذ لكى يكوّن بديهيات axlomatization التطابق عن طريق رسم مثلث فيه ضلعين وزاوية محصورة يطابقان نظائرهما لمثلث معطى. ثم يطلب قياس بقية زوايا وأضلاع المثلث المرسوم ومقارنتها بنظائرهما فى المثلث المعطى. ومع تغيير صور وأبعاد المثلث

المعطى يجد التلميذ أنه فى الأحوال التى رسمها أن الست أزواج للأجزاء المتناظرة تكون متطابقة فيكون المثلثان (المرسوم والمعطى) متطابقين... ومن النتائج التى توصل إليها التلميذ وتلاميذ الفصل وبقية الفصول على مثلثات معينة تجرد هذه النتائج وتؤخذ كبديهية لأى مثلث. ومنها نصل إلى:

د. ١-بديهية (١١): بديهية تطابق مثلثين بضلعين وزاوية محصورة: يتطابق المثلثان إذا وجد تناظر بين رؤوسهما يجعل ضلعين وزاوية محصورة لأحدهما تتطابق بالترتيب مع الأجزاء المناظرة فى المثلث الثانى.

وبالمثل عن طريق الرسم والتجريد نصل إلى:

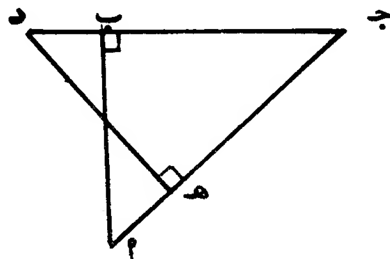
د. ٢-بديهية (١٢): بديهية تطابق مثلثين بزاويتين وضلع محصور: يتطابق المثلثان إذا وجد تناظر بين رؤوسهما يجعل زاويتين وضلع محصور فى أحدهما يتطابق بالترتيب مع الأجزاء المتناظرة فى المثلث الثانى.

ثم تعطى تطبيقات متدرجة على تطابق مثلثات غير متداخلة ومتداخلة

مثل: إذا نصف القطران أحـ، ب د كل منها الآخر فى هـ للشكل الرباعى أ ب حـ د فإثبت أن

△ أ هـ ب ≡ △ حـ هـ د

، معطى $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـ د}$، $\overleftrightarrow{د هـ} \perp \overleftrightarrow{أحـ}$، $\overline{ب حـ} \equiv \overline{حـ هـ}$ اثبت أن $\overline{د حـ} \equiv \overline{أحـ}$

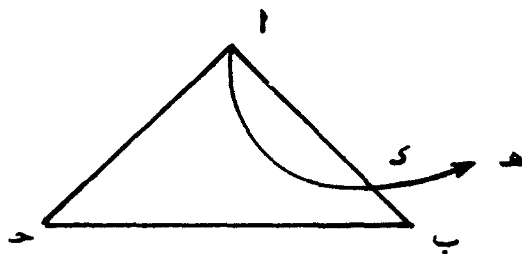


(هـ) تقديم تعريفات المثلثات المختلفة (متطابقة، متساوية الساقين، متطابقة الأضلاع، مختلفة الأضلاع وتعريف داخلية المثلث.

(و) تقديم بديهية باش: وذلك بالتمهيد لها عند رسم منصف زاوية (أو باسقاط عمود من رأس مثلث أو...). لماذا يجب أن يقابل هذا المنصف الضلع المقابل. لا يوجد ما يعلل ذلك فى الهندسة الاقليدية (لاقليدس). وللتغلب على هذا نضع البديهية التالية:

بديهية (١٣): **بديهية باش:** المستقيم الذى يقطع ضلع مثلث ويمر بداخلية المثلث يقطر ضلع آخر للمثلث.

وهنا يمكن أن نوضح للتلميذ أن منصف زاوية أ فى△ أ ب حـ لابد أن يقطع الضلع ب حـ ولا يقطع أى من أ ب، ا حـ. وذلك لأنه إذا قطع أ ب كما فى الشكل فمعنى ذلك أنه يقطعه فى نقطة مثل ى،



وهذا يؤدى إلى أنه يوجد مستقيمان (الذى يقع عليه الضلع أ ب والمنصف أ د) يمران بالنقطتين أ، د وهنا يناقض بديهية (٤) التى تقول أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين مختلفتين.

ثم تعطى البديهية الخاصة بمنصف الزاوية.

بديهية (١٤): كل زاوية لها منصف.

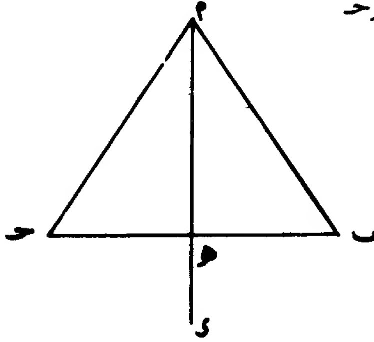
وعلى أساس هذه البديهيات تقدم المفاهيم والنظريات الخاصة

بالمثلثات متطابقة (متساوية) الساقين، والمتوسطات، وبالمنصفات وبالأعمدة للمثلث. وهنا يتعود التلميذ على تحليل المطلوب وتوضيح سبب كل خطوة فى البرهان... فمثلا بالنسبة للنظرية الآتية:

نظرية: إذا تطابق ضلعان فى مثلث فإن زاويتى القاعدة تتطابقان.

المعطى: $\overline{أب} \equiv \overline{أحـ}$

المطلوب: ∢ب ≡ ∢حـ



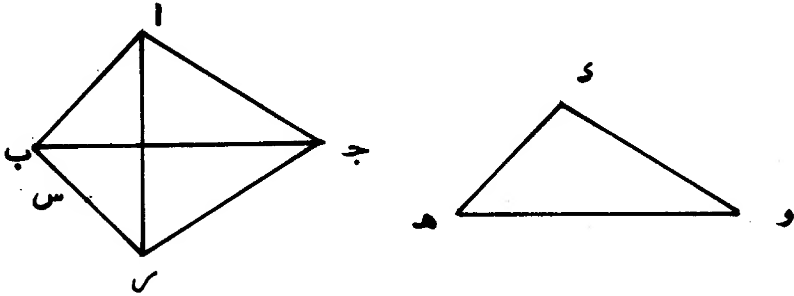
السبب	التقرير
معطى	البرهان: $\overline{أب} \cong \overline{أحـ}$
بديهية وجود منصف الزاوية	بفرض أن أد منصف ∢ب أ حـ
بديهية باش	أد يقطع $\overline{بحـ}$ عند نقطة هـ
تعريف منصف الزاوية	∢ب أ هـ ≡ ∢حـ أ هـ
خاصية التطابق العاكسة	$\overline{أهـ} \equiv \overline{أهـ}$
بديهية ضلعين وزاوية محصورة	△ أ ب هـ ≡ △ أ حـ هـ
تعريف تطابق مضلعين.	∢ ب ≡ ∢ حـ

(ز) تعطى بديهية وجود زاوية تطابق زاوية معلومة.

بديهية (١٥): من نقطة على مستقيم يوجد زاوية واحدة رأسها عند هذه النقطة وأحد ضلعيها شعاع واقع على المستقيم بحيث تكون هذه الزاوية تطابق زاوية معلومة.

(ح) تعطى نظرية تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع: يكون المثلثان متطابقين إذا وجد تناظر بين رؤوسهما بحيث يكون الثلاثة أضلاع لأحدهما تتطابق مع الأضلاع المناظرة للآخر.

فيما يلى برهان مفصل يتضح منه أن كل خطوة تستند على أساس بديهى (تعريف — بديهية — نظرية ... فى النظام)، ولا يوجد عمل يعتمد على تصور بدون أساس بديهى يسانده.



المعطى : $\overline{أب} \equiv \overline{ىهـ}$، $\overline{بحـ} \equiv \overline{هـو}$، $\overline{أحـ} \equiv \overline{ىو}$

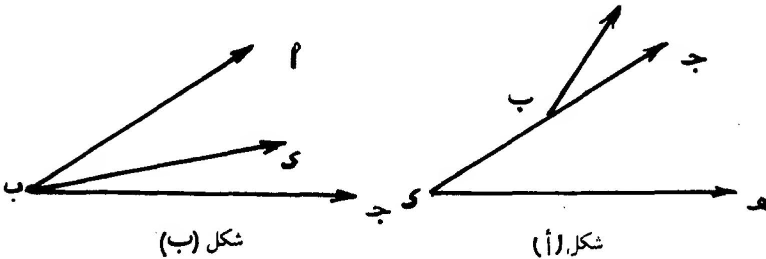
المطلوب : △ أ ب جـ ≡ ى هـ و

	التقرير	السبب
البرهان	١ — عند ب الواقعة على المستقيم ب حـ يوجد زاوية تطابق ∡ د هـ و. ولتكن هذه الزاوية ∡ س ب حـ	بديهية (١٥)
	٢ — نمد $\overleftrightarrow{بس}$ بحيث أن $\overline{رب} \equiv \overline{دهـ}$	بديهية (١)-يمكن أن نمد مستقيم من أى من جهتيه.
	٣ — بأخذ المستقيم $\overleftrightarrow{رحـ}$ المار بالنقطتين ر، حـ	بديهية — يوجد مستقيم واحد مار بنقطتين مختلفتين.
	٤ — بأخذ المستقيم $\overleftrightarrow{رأ}$ المار بالنقطتين ر أ	كما فى «٣»
	٥ — $\overline{بحـ} \equiv \overline{هـو}$	معطى

٦ ـ △ د هـ و ≡ △ س ب حـ	بديهية ضلعين وزاوية محصورة
من الضرورى أن نبين أن △ أ ب حـ ≡ △ س ب حـ	
٧ ـ $\overline{\text{س حـ}}$ ≡ $\overline{\text{د و}}$	تعريف تطابق مضلعين
٨ ـ $\overline{\text{أ حـ}}$ ≡ $\overline{\text{د و}}$	معطى
٩ ـ ∴ $\overline{\text{أ حـ}}$ ≡ $\overline{\text{س حـ}}$	الخاصية الانتقالية للتطابق.
١٠ ـ ∡ حـ أ س ≡ ∡ حـ س أ	نظرية (إذا تطابق ضلعين فى مثلث تطابقت الزاويتين المقابلتين للضلعين).
١١ ـ $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{د هـ}}$	معطى
١٢ ـ $\overline{\text{س ب}}$ ≡ $\overline{\text{د هـ}}$	من خطوة «٢»
١٣ ـ ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ≡ $\overline{\text{س ب}}$	كما فى «٩»
١٤ ـ ∡ ب أ س ∡ ب س أ	كما فى «١٠»
١٥ ـ ∡ ب أ حـ ≡ ∡ ب س حـ	بديهية الجمع على التطابق
١٦ ـ △ أ ب حـ ≡ △ س ب حـ	بديهية ضلعين وزاوية محصورة
١٧ ـ △ أ ب حـ ≡ △ د هـ و	نظرية (إذا تطابق مثلثين مع مثلث كانا متطابقين).

ثم تعطى النظرية الخاصة بتطابق مثلثين قائمين (بوتر وضلع) وتطبيقات على تطابق مثلثات أصعب تتطلب أكثر من زوج من المثلثات المتطابقة. فى أشكال تحتوى دوائر أو مثلثات أو مضلعات.

(ط) لاعطاء تعامد مستقيمين وخواص مستقيمين متعامدين يمهد باعطاء الزاوية المجاورة. وفى البداية تعطى تدريبات كافية ليميز التلميذ بين الزاويتين المتجاورتين وغير المتجاورتين.. فمثلا فى الشكل (أ)



شكل (ب)　　　شكل (أ)

الزاويتين هـ ء حـ ، حـ ب أ غير متجاورتين ، كذلك فى الشكل (ب) الزاويتين ء ب حـ ، حـ ب أ غير متجاورتين . لأن الزاويتين المتجاورتين يكون لهم رأس مشترك وضلع مشترك بين الشعاعين الآخرين (للزاويتين) .

(ك) لاعطاء المنصف العمودى لقطعة مستقيمة وخواص (أى نقطة عليه تكون متساوية البعد عن نهايتى القطعة المستقيمة) ، يمهد باعطاء بديهية أقصر مسار بين نقطتين وبديهية وجود نقطة منصفة للقطعة المستقيمة . وهما :

بديهية (١٧) : أقصر مسار بين نقطتين هو القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

بديهية (١٨) : لكل قطعة مستقيمة يوجد نقطة منصفة لها .

(ل) لاعطاء التعامد فى الفراغ يمهد باعطاء تعريف للمستوى والبديهية الخاصة بتعيين مستوى .

بديهية (١٩) : ثلاث نقط ليست مستقيمة تعين مستوى .

ثم النظريات الخاصة بتعامد مستقيم مع مستوى .

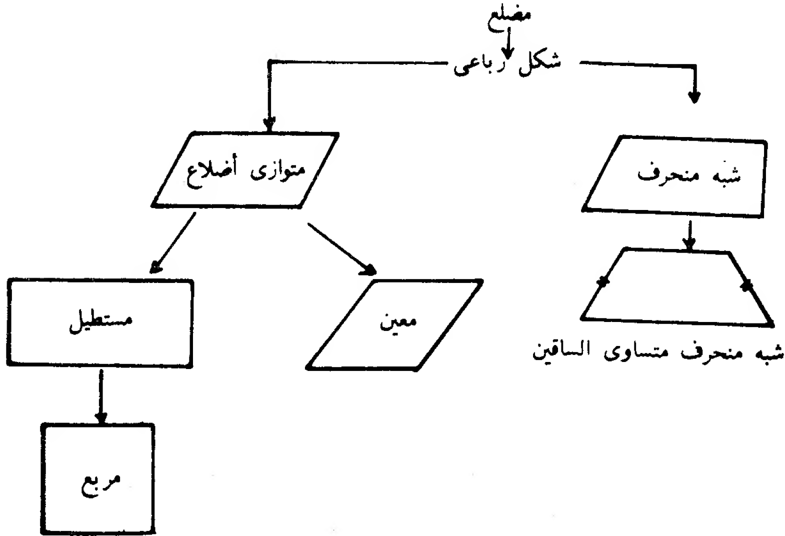
(م) لاعطاء التوازى يمهد بالمفاهيم الخاصة بتقاطع وعدم تقاطع مستقيمين مستويين ، وبالبرهان غير المباشر ، وبديهيات المنطق (إما ~م أو م صواب وليس الاثنين معا ــ قانون الوسط المستبعد ، لايمكن أن يكون كلا من م ، ~م صواب معا . قانون التناقض) . ثم تعطى بديهية التوازى وهى المسلمة الخامسة لاقليدس .

بديهية (٢٠) : بديهية التوازى ــ من نقطة معطاه لا تقع على مستقيم معلوم يوجد مستقيم واحد فقط موازيا للمستقيم المعلوم .

ثم تعطى النظريات الخاصة بالزوايا المتناظرة والمتبادلة وتطبيقاتها .

ثم يعطى برهان الوجود والوحدانية ، ونظريات تتطلب هذا البرهان مثل : من نقطة على مستقيم معلوم يوجد مستقيم واحد فقط عمودى على المستقيم المعلوم . وغيرها .

تعطى الأشكال الرباعية التى فيها أضلاع متوازية. متوازى الأضلاع ــ المستطيل ــ المربع ــ المعين ــ شبه المنحرف، والنظريات الخاصة بها التى تبين خواصها وتطبيقاتها عليها. أنظر الشكل.



ثم يعطى التوازى فى الفراغ، والمستويات المتوازية، والزاوية الزوجية.. مع النظريات الخاصة بها.

(ن) تقديم الدوائر والمفاهيم والنظريات الخاصة بها لا تعتمد على بديهيات خاصة بها. والأساس البديهى لما سبق يكفى لها.

(س) عند اعطاء المساحات: يمهد باعطاء المنطقة المضلعة، المنطقة المثلثة، ... أو أى شكل مستوى له حدود. واعطاء وحدة لقياس المساحة ولتكن وحدة المربع square unit.

ثم يعطى تعريف منطقة محدودة بمنحنى او بمضلع كعدد الوحدات المربعة المحتواه فى هذه المنطقة.

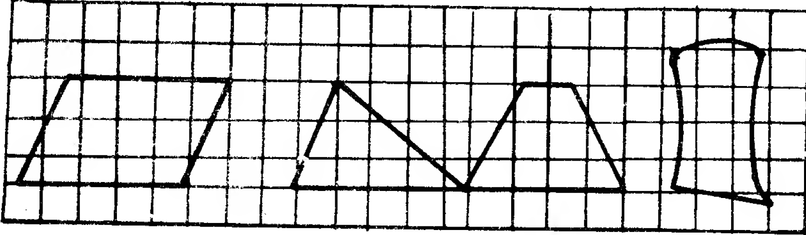
ثم يعطى تعريف مساحة منطقة محدودة بمنحنى أو بمضلع كعدد الوحدات المربعة المحتواه فى هذه المنطقة.

والبديهية:

بديهية (٢١): إذا كان تقاطع مضلعين هو أحد الأضلاع (أو ϕ) فإن مساحة المنطقة المحددة بالمضلعين هو مجموع مساحتى

المنطقتين المضلعتين. وعن طريق القياس لبعض مستطيلات معطى أبعادها لتعيين مساحة المستطيل نساعد التلميذ أن يكون البديهية التالية:

بديهية (٢٢): مساحة المنطقة المستطيلة تساوى حاصل ضرب بعديه (طوله وعرضه) وعن طريق أنشطة يقوم بها التلميذ لقياس مساحة أشكال مختلفة (بعضا منها فى الشكل الآتى) نساعد التلميذ أن يكتشف النظريات الخاصة بمساحات المناطق الخاصة بالمثلثات ومتوازى الأضلاع، شبه المنحرف، المعين، وأوجه بعض المجسمات ثم اثباتها بالبرهان المنطقى ـ مع اعطاء تطبيقات عليها.



وعموما يمكن استخدام بديهيات أخرى بديلة فى مدخل آخر، وقد تكون أحد هذه البديهيات نظرية فى المدخل السابق أو أحد النظريات تكون بديهية فى المدخل السابق.

ويوجد مداخل أخرى للهندسة الاقليدية على أساس بديهى سليم معدل للنظم الحديثة لهيلبرت أو بيرخوف ليناسب التلميذ فى مراحل أعلى كالمرحلة الثانوية، إلا أن المدخل السابق هو أبسط هذه المداخل.

٤.٢.٤ ـ الهندسة العملية (الهندسة الإنشائية):ـ

تعتبر الهندسة العملية من أروع وأحب الأنشطة الرياضية فى المدرسة فهى تقوم على اللعب بكل مايتصل بمعرفة التلميذ بالهندسة: معلوماته عن البديهيات، التعريفات، النظريات المبرهنة، قدرته على تحليل المشكلات، قدرته على التخمين ووضع طرق التحقيق، مهارته فى

تخطيط البرهان المجرد، قدرته على التعرف عما اذا كان البرهان الذى اقترح صحيحا أو لا، قدرته على بحث الاحتمالات المختلفة التى تنتج من الفروض المعطاه، قدرته على معرفة عما اذا كان حله وحيداً أم لا وعلى ذلك فالهندسة العملية تكون جزءاً هاماً فى خبرة التلميذ بالهندسة. ومن جهة أخرى فالهندسة العملية لها قيمتها التاريخية فى تطوير الرياضيات والتى يستحسن أن يأخذ المدرس فكرة عنها حتى يقف على أهميتها فى تدريسه ولإثراء معلومات التلميذ. ومن هذه المشكلات القديمة فى الهندسة العملية: إستخدام المسطرة والبرجل فى محاولة تثلبث أى زاوية بوجه عام (أو بصورة أخرى إيجاد ضلع مكعب حجمه ضعف حجم مكعب معطى طول ضلعه)، تربيع الدائرة (أى رسم مربع له نفس مساحة دائرة معطاه)، رسم سباعى منتظم داخل دائرة معطاة.

والمشاكل غير المحلولة من مثل هذا النوع أدت الى التطور الحديث فى الرياضيات، حيث أنه بعد محاولات فاشلة عبر القرون للبحث عن حل ابتدأ الرياضيون يبحثون فى «كيف يمكن إثبات أن مشكلات معينة لايمكن حلها». وبالنسبة للجبر فقد أدى البحث فى إثبات أن حل المعادلة من الدرجة الخامسة من بالصورة الجذرية غير ممكن، الى اختراع المجموعات على يدآبل وجالوا (فى القرن التاسع عشر). وبالنسبة لإثبات أن بعض العمليات الهندسية غير ممكنة فهذا يأتى عن طريق إستخدام مفاهيم جبرية حديثة (مثل الحقل) لإثبات عدم إمكان تثليث الزاوية، تربيع الدائرة، رسم مسبع منتظم داخل دائرة بواسطة البرجل والمسطرة فقط. هذا بالأضافة الى أن مناقشة العمليات الهندسية الاقليدية يلقى الضوء على بعض عيوب الهندسة الاقليدية.

وعلى ذلك فإننا نقدم فيما يلى مناقشة على مشكلات (مسائل) الهندسة العملية وتعلمها، ثم بعض العمليات الهندسية وارتباطها بالجبر وأخيراً مناقشة صحة أساسيات بعض العمليات الهندسية.

١ـ حل مشكلات الهندسة العملية وتعلمها :ـ

معظم تلاميذ المرحلة الإعدادية لهم خبرة فى رسم العمليات الهندسية البسيطة بدون برهان مثل تنصيف قطعة مستقيمة أو تنصيف زاوية أو رسم عمود على قطعة مستقيمة من نقطة (خارجها أو عليها).

وهذه الطريقة لابأس بها فى البداية وتساعد فى إعطاء التلميذ فكرة حدسية عن بعض المحال الهندسية وتركيبات الأشكال وهى كافية لعمل بعض الأشكال والتصميمات، ولكنها غير كافية لتحقيق الأهداف المنشودة لتدريس الهندسة العملية أو لتقديم التلميذ بعد ذلك للهندسة الوصفية مثلا فيما بعد.

ومعظم العمليات الهندسية التى يقابلها التلميذ تأتى بعد النظريات المرتبطة وتحتاج الى تحليل وبرهان بسيط (مثل تنصيف قطعة مستقيمة، تنصيف زاوية،رسم عمود على قطعة مستقيمة من نقطة معلومة خارجها أو عليها أو رسم مماس من نقطة معلومة الى دائرة معلومة وإثبات صحة الطريقة). إلا أنه يوجد مشكلات شيقة يكون حلها غير واضح (غير سهل) ويمكنها أن تنمى قدرات التلميذ وتحببه فى المادة.

ويتضمن حل مشكلات (مسائل) الهندسة العملية مايأتى :ـ

١ ـ تحديد كيفية استخدام العناصر المعطاة لرسم الشكل المطلوب.

٢ـ رسم الشكل (العمل حتى الحصول على الشكل المطلوب).

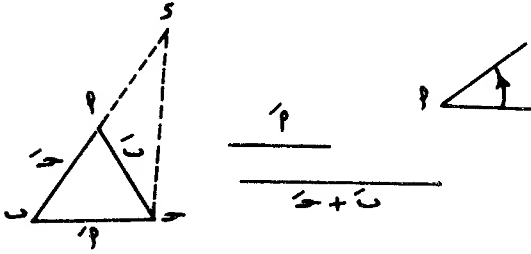
٣ـ إثبات أن الرسم (العمل أو الإنشاء) صحيح. أى إثبات أن الشكل المرسوم يحتوى على العناصر المعطاه إما مباشرة أو غير مباشرة.

٤ـ مناقشة أحتمالات الرسم، أى الحالات التى يكون فيها الرسم ممكنا وأن يكون الرسم وحيداً إذا كان ممكنا. أى أن حل مشكلة الهندسة العملية يتضمن بإختصار: (١) التحليل، (٢) الرسم (٣)

البرهان (٤) المناقشة ونوضح ذلك بالمثال الآتى:

مثال: ارسم مثلثا معطى قاعدته وزاوية رأسه المقابلة لهذه القاعدة ومجموع طولى الضلعين الآخرين.

المعطى: أَ، بَ+حـَ، ∢ أ والمطلوب رسم △ أب حـ.



شكل (٤٢)أ

التحليل: بفرض أن المثلث المطلوب هو المثلث أب حـ. كيف نستخدم بَ+حـَ لنحصل على المثلث؟ هل يوجد مثلث آخر يساعدنا فى الرسم، باستخدام بَ+حـَ، والعناصر الأخرى المعطاه التى يمكن رسمها والتى منها نحصل على المثلث أب حـ؟. نلاحظ أنه إذا مد ب أ الى نقطة ى بحيث أنه أى ≡ أحـ فإن طول بى = طول بَ+حـَ. وحيث أن △أى حـ متساوى للساقين فإن ∢ى ≡ ½ ∢ب أحـ. وعلى ذلك فإن المثلث أب حـ يمكن رسمه لأنه عرف فيه ضلعان والزاوية المقابلة لأحدهما. العمود المنصف للضلع ى حـ يقطع ى ب فى نقطة أ. وبذلك يعين المثلث أب حـ (شكل «٤٢» أ).

الرسم (العمل أو الإنشاء): نأخذ المستقيم ب س ونأخذ عليه نقطة د بحيث أن بى ≡ بَ+حـَ.

عند نقطة د نرسم زاوية ∢ى ≡ ½ ∢أ. نركز بالبرجل عند ب وبنصف قطر طوله أَ نرسم دائرة تقطع المستقيم ى ص فى نقطتى حـ، حـَ. نرسم ب حـ. نقيم العمود المنصف للقطعة ى حـ. يتقاطع العمود مع بى فى أ نرسم أحـ △أب حـ هو المثلث المطلوب.

البرهان:

(١) $\overline{\text{ب حـ}} \equiv \overline{\text{أ}}$ عملا

(٢) △ أ د حـ متساوى الساقين لأن أ تقع على العمود المنصف للقطعة $\overline{\text{د حـ}}$ عملا.

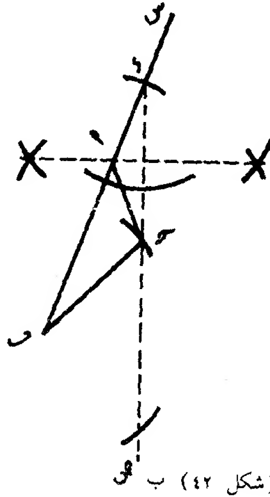
(٣) $\overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{أ حـ}}$ ضلعا المثلث المتساوى الساقين.

(٤) ∴ $\overline{\text{ب أ}} + \overline{\text{أ حـ}} \equiv \overline{\text{ب أ}} + \overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{ب د}}$ لأن طول $\overline{\text{ب د}} =$ طول ب + حـ عملا.

(٥) ∢ أ د حـ ≡ ∢ أ حـ د زاويتى القاعدة لمثلث متساوى الساقين.

(٦) ∢ ب أ حـ ≡ ∢ أ د حـ + ∢ أ حـ د نظرية الزاوية الخارجة لمثلث.

(٧) ∢ ب أ حـ ≡ ∢ أ لأن ∢ أ د حـ ≡ $\frac{1}{2}$ ∢ حـ أ ب عملا. شكل (٤٢) ب.



(شكل ٤٢) ب

المناقشة: حتى يكون الرسم ممكنا يجب أن تكون ب + حـ > أ لأن مجموع ضلعين فى مثلث يجب أن يكون أكبر من الضلع الثالث. فى رسم المثلث المساعد △ ب حـ د، الدائرة التى مركزها ب ونصف

قطرها أَ تقطع المستقيم ءص فى نقطتين حـ، حـَ (كما فى شكل «٤٢» ب). ومن ثم يوجد حلين للمثلث ب حـ ء. إذا كانت أَ مساوية للعمود من ب الى ءص أى إذا كان طول أَ مساوياً لطول هذا العمود) فان هذه الدائرة تمس المستقيم ءص فى نقطة. ومن ثم يوجد مثلث واحد ب حـ ء. إذا كانت أَ أقل من هذا العمود، فان الدائرة لا تتقاطع مع ءص ولايوجد مثلث ب حـ ء. من كل مثلث مساعد يمكن الحصول على مثلث واحد مطلوب أ ب حـ. وحيث أن العمود المنصف للقطعة ءحـ يقابل ب ء فى نقطة واحدة. وعلى ذلك فقد يوجد حلين أو حل أو لايوجد أى حل بالمرة للمشكلة (المسألة) المعطاة.

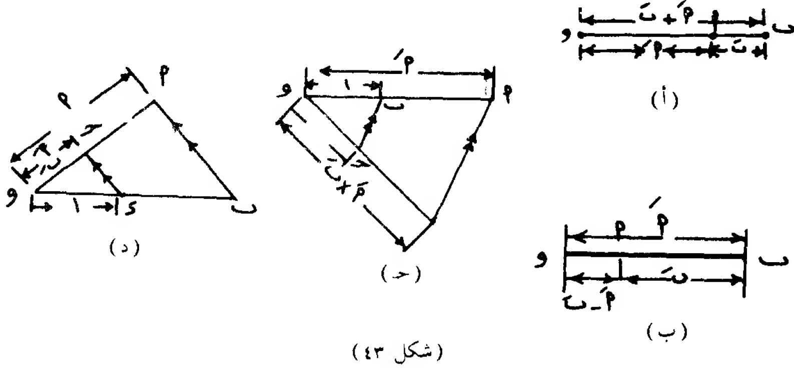
ويستحسن أن يراعى المدرس الخطوات السابقة فى تدريسه للهندسة العملية إذ أن هذه الخطوات مع بعضها تتكامل فى العمل الهندسى وكثير من المعلومات الهامة التى تخص الرسم تكون متوازية حتى تظهرها وتوضحها المناقشة.

٢ ـ بعض العمليات الهندسية وارتباطها بالجبر:

يمكن للمدرس أن يستعين بالعمليات الهندسية ليس فقط فى عمل الرسوم الهندسية وتوضيح مفاهيم الهندسة ولكن فى توضيح مفاهيم الجبر والحساب واستخدامها فى الهندسة فى المراحل المختلفة. فمثلا العمليات الهندسية الآتية توضح العمليات الأساسية على القطعة المستقيمة. أى الجمع، والطرح والضرب والقسمة ومنها نلاحظ أن العمليات الأصلية فى الجبر تناظر العمليات الأولية الهندسية ـ فيما يأتى نقصد بالرمز أَ قطعة مستقيمة أو مقياسها (طولها).

(١) معطى قطعتين مستقيمتين أَ، بَ والمطلوب رسم قطعة مستقيمة أَ+بَ. لعمل قطعة مستقيمة أَ+بَ نرسم مستقيم نأخذ عليه المسافة وأ= طول أَ، المسافة أب= طول بَ (بواسطة البرجل) شكل (٤٣) أ.

(٢) معطى قطعتين مستقيمتين أَ، بَ والمطلوب رسم قطعة مستقيمة أَ ـ بَ (حيث أَ > بَ). لعمل قطعة مستقيمة أَ ـ بَ نرسم مستقيم، نأخذ عليه المسافة وب = طول أَ، أب ≡ بَ ولكن في هذه المرة يكون أب في اتجاه مخالف من وب. شكل (٤٣) ب.


(شكل ٤٣)

٣ـ معطى قطعتين مستقيمتين أَ، بَ والمطلوب رسم قطعة مستقيمة أَ×بَ. لعمل القطعة أَ×بَ نرسم مستقيم ونأخذ عليه القطعة وحـ بحيث يكون طولها مساوى لطول بَ نرسم مستقيم آخر يمر بنقطة و. ونأخذ عليه طول وب = ١، طول وأ = طول أَ نصل ب حـ، من أ نرسم مستقيم موازى للقطعة ب حـ يقطع المستقيم وحـ في ى القطعة وى ≡ أَ×بَ. شكل (٤٣) حـ.

٤ـ معطى قطعتين مستقيمتين أَ، بَ والمطلوب رسم قطعة مستقيمة أَ/بَ لعمل القطعة أَ/بَ، كما في شكل (٤٣) د، نأخذ طول وى = ١، وب ≡ بَ، وأ ≡ أَ. من ى نرسم مستقيم موازى المستقيم أب و يقطع المستقيم وأ في حـ. القطعة أحـ ≡ أَ/بَ. شكل (٤٣) ى.

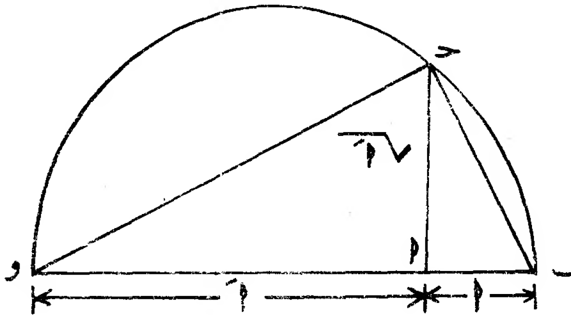
و يلاحظ أنه لأي قطع مستقيمة أَ، بَ، حـَ،... مقياسها بالأعداد الحقيقة (طولها عدد حقيقى)، باجراء العمليات السابقة عليها بالتالى يمكن أن نرسم (نكون أو ننشأ) أى قطعة مستقيمة معبر عنها عن طريق أَ، بَ، حـَ.. فئة كل القطع المستقيمة المكونة بهذا الشكل

تكون حقلا . ونقول في هذه الحالة أن الحقل تولد (أنتج) بالقطع المستقيمة أَ، بَ، حـَ .

ـ إذا كانت أَ، بَ، حـَ... هى أطوال القطع المستقيمة (مقياسها الأعداد الحقيقية) فاننا بالعمليات الأربعة نقول أن الحقل تولد بالأعداد الحقيقية أ، ب، حـ .

ويمكن أيضا أن نجرى عملية إيجاد الجذر التربيعى لقطعة مستقيمة باستخدام المسطرة والبرجل فقط .

وذلك بأخذ وأ ≡ أَ على مستقيم، طول أب = ١ (كما في شكل «٤٣» هـ) . نرسم دائرة يكون قطرها وب ولرسم العمود على القطر من نقطة أ ليقطع الدائرة في حـ يكون أحـ = √أَ (أو بالأحرى طول أحـ = √طول أَ) .



شكل (٤٣) هـ

ويمكن للمدرس أن يستعين بالعمليات الهندسية في توضيح مفاهيم في الحساب أو الجبر. فمثلا يمكن توضيح أن المتوسط الحسابى > المتوسط الهندسى > المتوسط التوافقى . أى للعددين س، ص (حيث س ≠ ص وإلا تساوت المتوسطات)

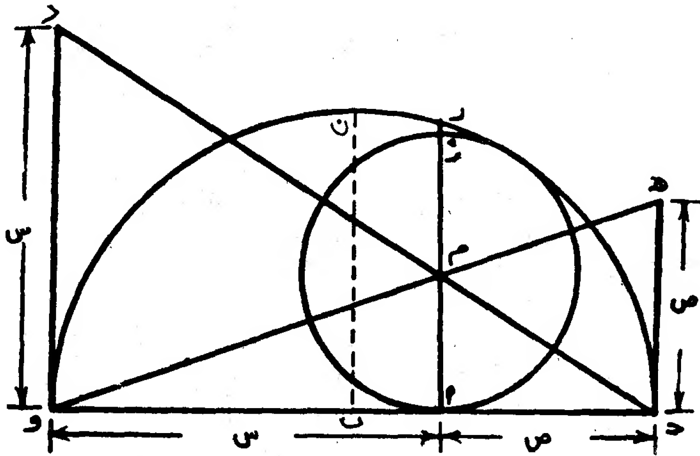
يكون $\frac{س + ص}{٢} > \sqrt{س\ ص} > \frac{٢\ س\ ص}{س + ص}$ عن طريق العملية الهندسية الآتية :

باخذ النقطتين آ، ب على مستقيم وحـ كما فى شكل (٤٤)، بحيث أن طول وأ = س، طول أحـ = ص. ننصف وحـ فى ب ونرسم نصف دائرة مركزها ب ونصف قطرها وب. نقيم عمودا على وحـ من نقطة ب يقطع نصف الدائرة فى ن نقيم العمودين ود، حـ هـ على وحـ من النقطتين و، حـ طولاهما على الترتيب س، ص يتقاطع وهـ، حـ د فى نقطة م.

وعلى ذلك يمكن إثبات أن أم // حـ هـ، ود. نرسم دائرة مركزها م تمس وحـ فى أ، ونمد أم ليقطع الدائرة فى ز ويقطع نصف الدائرة فى نقطة ر. الدائرة م تمس نصف الدائرة. طول نصف القطر لنصف الدائرة أى طول ب و = $\frac{س + ص}{٢}$ ، طول ر أ = $\sqrt{س ص}$ (من نظريات لدوائر).

طول ز أ = ٢ طول م أ = ٢ $\left[\frac{س ص}{س + ص}\right]$ (من تشابة المثلثين وم أ، وهـ حـ)

وعلى ذلك فان $\frac{س + ص}{٢} > \sqrt{س ص} > \frac{٢ س ص}{س + ص}$ لأن نصف القطر ب ن > أ ر > أ ز



شكل (٤٤) مقارنة المتوسطات

٤ ـ مناقشة صحة أساسيات بعض العمليات الهندسية:

نقدم فيما يلى فكرة سريعة تلقى بعض الضوء على بعض عيوب الهندسة الاقليدية من خلال مناقشة أساسيات بعض العمليات الهندسية المألوفة للمدرس، وكيفية معالجة مثل هذه العمليات على أساس سليم.

من عيوب النظام البديهى للهندسة الإقليدية الذى وضعه إقليدس أن نظامه ينقصه بديهيات. بمعنى أنه استعمل فى براهينه بديهيات لم يذكرها صراحة فى نظامه البديهى. فمثلا نظامه ينقصه بديهيات خاصة بترتيب النقط على خط مستقيم (أى علاقة البينية).

فقد اعتمد إقليدس فى أحد براهينه على أنه إذا كانت ثلاثة نقط على استقامة واحدة فان أحدهم تكون بين الآخرين دون أن يذكر ذلك صراحة فى أحد بديهياته.

كما اعتمد فى برهنته على استمرار الأشكال (مثل الدوائر والمثلثات والمستقيمات) دون أن يكون عنده بديهية على الاستمرار، وكذلك مفهوم التطابق عنده يحتاج الى تكملة. وقد اكتشف باش ايضاً (فى القرن التاسع عشر) أن بديهيات اقليدس ينقصها بديهية على ترتيب النقط فى مستوى. وقد كون باش بديهيته كما يلى «اذا قطع مستقيم أحد أضلاع مثلث ولم يمر بأى من رؤوسه فانه يقطع (على الأقل) أحد الضلعين الآخرين».

ومن المشوق أن نعرف أنه بدون هذه لبديهية يمكن الوصول من نظام إقليدس الى مغالطات ونتائج متناقضة كالبرهان المعروف والخاص بأن أى مثلث يكون متساوى الساقين، و يعتمد مثل هذا البرهان على رسم غير صحيح تبدو الخطوط فيه متقاطعة داخل أو خارج مثلثات أو دوائر بينما هى فى الواقع غير متقاطعة. ومن ثم يبين الشكل بعض خواص غير سليمة أو غير موجودة صراحة فى البديهيات الموضوعة للنظام.

وعلى ذلك فان إقليدس كان يعتمد فى بعض براهينه على خواص تعتمد على الرسم وغير موجودة فى بديهياته .

ولنأخذ مثالا لأحد نظرياته والموجود برهانها فى الكتب المدرسية (أو فى كتاب إقليدس الأصول) كما يأتى :

نظرية : فى المثلث المستاوى الساقين يكون زاويتا قاعدته متساويتين .

البرهان : معطى المثلث أ ب حـ فيه الضلعان أ ب ، أ حـ متساويان بتنصيف زاوية أ ثم بتطبيق المثلثين أ د ب ، أ د حـ بضلعين وزاوية محصورة ينتج أن الزاويتين ب ، حـ متساويتان شكل (٤١) السابق . وهنا يعتمد البرهان على بديهيتين غير موجودتين فى النظام البديهى لاقليدس .

أولا يفترض البرهان أنه يوجد منصف وحيد للزاوية أى يوجد منصف واحد للزاوية ، وثانيا يفترض البرهان أن منصف الزاوية يتقاطع مع الضلع المقابل (للمثلث) لم يثبت إقليدس الفرض الأول وتجاهل الفرض الثانى . وهو لن يستطيع إثبات ذلك من بديهياته التى ينقصها بديهيات على علاقة البينية وعلاقة التطابق .

وبالنسبة للعمليات الهندسية لاقليدس فانها لم تخل من العيب السابق فى إثباتها . بالاضافة الى ذلك فانه استخدم بعض العمليات الهندسية وأعتمد عليها بدلا من نظريات الوجود .

فمثلا اعتبر فى العمليات الخاصة بتنصيف زاوية أو قطعة مستقيمة وجود منصف الزاوية أو وجود منصف القطعة المستقيمة . وفى العملية الخاصة برسم عمود على مستقيم من نقطة خارجة يعتمد فيها على رسم زاوية أخرى ، فاذا لم توجد مثل هذه الزاوية التى تطابق زاوية معلومة لايمكننا رسم العمود المطلوب فى العملية .

ونلاحظ أنه باستخدام نظام هيلبرت للهندسة الاقليدية (أو الأنظمة الأخرى التى تقابلها) يمكن تلافى هذه العيوب إذ أن هذا النظام لاينقصه بديهيات تعتمد النظريات المختلفة فى هذا النظام عليها.

فمثلا فى بند ١.٢.٤ الخاص بالتطابق يتبين من البديهية الخامسة والرابعة وجود قطعة مستقيمة على نصف مستقيم تطابق قطعة مستقيمة معلومة ووجود زاوية فى مستوى تطابق زاوية معلومة.

وعلى ذلك إذا أردنا أن تكون العمليات الهندسية المختلفة على أساس سليم يجب أن نستخدم بديهيات كاملة ولا تعتمد على الشكل وخواصه فى البرهنة أو طريقة العمل. ويمكن معالجة العمليات الهندسية على هذا الأساس إذا كان التلميذ مستعداً للطريقة البديهية.

وسنقدم فيا يلى مثالا للعملية الهندسية الخاصة بتنصيف الزاوية مع ذكر الأساس البديهى السليم والمأخوذ عن نظام هيلبرت للهندسة الاقليدية.

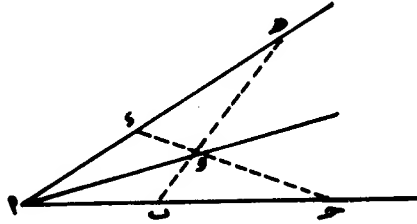
العملية: نصف زاوية معلومة.

العمل: معطى زاوية ضلعاها أس، أص. على أى من الضلعين وليكن الضلع أس نأخذ نقطتين ب ، حـ بحيث يكون ب (أ، ب، حـ). هذا يمكن من بديهيات الوقوع التى تبين وجود النقطتين ومن بديهيات علاقة البينية. على الضلع أص نأخذ نقطتين ى، هـ بحيث أن ب (أ، ى، هـ) وبحيث أن $\overline{\text{أى}} \equiv \overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{أهـ}} \equiv \overline{\text{أحـ}}$ هذا ممكن من بديهيات الوقوع والبينية ومن بديهيات التطابق وخاصية الأنتقال للقطع المستقيمة المتطابقة. نصل ب هـ، ى حـ هذا يمكن من بديهيات الوقوع التى تقول أنه من نقطتين يمكن رسم مستقيم واحد فقط مار بها. يتقاطع ب هـ، ى حـ فى نقطة و. يمكن إثبات تقاطع ب هـ، ى حـ فى و من البديهيات وترتيب الأشعة كما سنبين فيا بعد.

الشعاع أحـ يكون هو المنصف للزاوية ∢أ المعلومة. أنظر شكل (٤٥).

البرهان يأتي من: △ ب أ هـ ≡ △ د أ حـ بضلعين وزاوية محصورة.
△ ب وحـ ≡ △ د وحـ بزاويتين وضلع.

وعلى ذلك ب‾حـ ≡ د‾هـ. وعلى ذلك فإن △ أ ب و ≡ △ أ د و بثلاثة أضلاع أو ضلعين وزاوية محصورة. وعلى ذلك يكون الشعاع أو هو منصف الزاوية ∢ أ.



(شكل ٤٥)

هذا وقد ذكرنا بديهيات التطابق فى بند ١.٢ وللقارىء الذى ليس عنده فكرة عن هندسة المسلمات نورد فيما يأتى بديهيات الوقوع المستوية وبديهيات البينية على خط مستقيم (للنظام المأخوذ عن هيلبرت) التى أعتمدنا عليها فى المثال السابق.

(١) بالنسبة لبديهيات الوقوع:

(أ) لأى مستقيم ل توجد نقطتان مختلفتان أ، ب بحيث أن أ، ب ∋ ل.

(ب) إذا كانت النقطتان أ، ب مختلفتين فانه يوجد مستقيم واحد فقط ل بحيث أنه أ، ب ∋ ل.

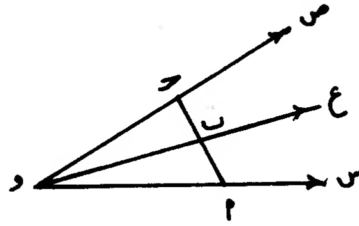
(٢) بالنسبة لبديهيات البينية:

(أ) إذا كانت ب (أ، ب، حـ) فان النقط أ، ب، حـ ثلاثة نقط على استقامة واحدة و مختلفة.

(ب) إذا كانت ب (أ، ب، حـ) فان ب (حـ، ب، أ).

(حـ) إذا كانت النقطتان أ، ب مختلفتين فانه يوجد نقطة حـ بحيث يكون ب (أ، ب، حـ).
(ى) إذا كانت النقطتان أ، ب مختلفتين فإنه يوجد نقطة حـ بحيث يكون ب (أ، ب، حـ).

أما محاولة إثبات أن ب هـ، حـ ى فى المثال السابق يتقاطعان فى «و» والتى اعتمدنا عليها فى العمل فتأتى من البديهيات السابقة وترتيب الأشعة. فمثلا نقول أن الشعاع وع يقع بين الشعاعين وس، وص إذا وإذا فقط وجدت النقط أ، ب، حـ على الأشعة وس، وع، وص على الترتيب بحيث يكون ب (أ، ب، حـ) ـ شكل (٤٦).



شكل (٤٦)

وعلى ذلك ـ فى المثال السابق فان تقاطع ب هـ، حـ ى (شكل ٤٦) يأتى من: ب (أ، ى، هـ) ⇐ الشعاع ب ى بين الشعاعين ب أ، ب هـ ⇐ الشعاع ب هـ بين الشعاعين ب ى، ب حـ ⇐ يوجد نقطة على الشعاع ب هـ مثل و بحيث تكون ب (حـ، و، ى) وهذا يدل على أن ب هـ، حـ ى يتقاطعان فى و.

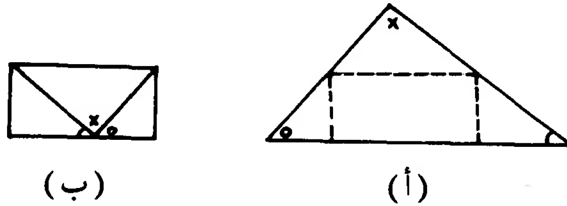
٥.٢.٤ ـ بعض الوسائل فى تدريس الهندسة:

علاوة على الوسائل التى قدمناها أثناء مناقشة هذا الباب والباب السابق نقدم فيما يلى بعض الوسائل الأخرى التى يمكن استخدامها فى تدريس هندسة المرحلة الاعدادية.

١ ــ الوسيلة الأولى :

ويمكن عمل هذه الوسيلة (أو مانسميها نموذج) من ورق كرتون وتتكون من مثلث مقطوع الى أربعة أجزاء . القطع الأول عند الخط الواصل بين منتصفى ضلعين والقطعان الآخران عند العمودين المقامين من منتصفى الضلعين المذكورين على الضلع الثالث كما فى شكل (٤٧) أ، حيث يبين الخط المنقط مكان القطع. بتوصيل الأجزاء مرة أخرى بشريط لازق يمكن أن تطوى الأجزاء كما فى شكل (٤٧) ب بحيث يسمح للرأس أن تقع على القاعدة، وأن يطوى الجزآن الآخران ليقابلا الرأس.

وتستخدم هذه الوسيلة لتوضيح (تحقيق او استنتاج) مجموع زوايا المثلث، مساحة المثلث، نظرية منصفى ضلعى المثلث.



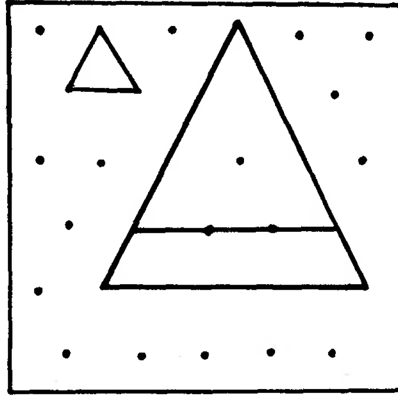
شكل (٤٧)

٢ ــ الوسيلة الثانية :

يمكن استخدام لوحة مثبت عليها مسامير تحدد رؤوس مربعات فى استنتاج بعض المفاهيم الرياضية. تسمى مثل هذه الوسيلة (التى يألفها معظمنا) بلوحة التكعيبات المربعة square lattice . ويمكن استخدام لوحة تكعيبات أخرى تكون المسامير فيها على رؤوس مثلثات وتسمى تكعيبات مثلثية. وتوضح مثل هذه اللوحة (سواء كانت المثلثات متساوية الأضلاع أم لا) نظريات مثل :

(١) نظرية الأجزاء المتساوية المقطوعة.

(٢) نسبة تقييم ضلعى مثلث بمستقيم يوازى الضلع .
(٣) خواص متوازى الاضلاع .
(٤) خواص المضلع .
(٥) الأعداد المثلثية .
(٦) قياس (أو حساب) المساحات باستخدام وحدات ليست من الضرورى أن تكون مربعة .
أنظر شكل (٤٨)

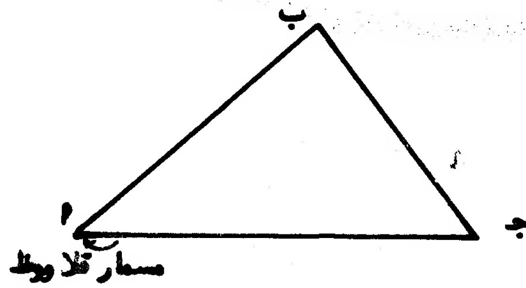


(شكل ٤٨)

٣ــ الوسيلة الثالثة :

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لتوضيح خاصية المثلث (متباينة المثلث) أى لتوضيح أن مجموع أى ضلعين فى ثلث أكبر من الضلع الثالث .

وتتكون الوسيلة من قضبين متصلين بمسمار قلاووظ عند أ (كما فى شكل ٤٩) . قد يكون القضيبان من الخشب أو قد يكونا شريطين ميكانو. وعند ب نربط قضيب آخر ب حـ بحيث يتحرك بسهولة حول ب . نثبت الزاوية بين القضيب عند أ بربط المسمار القلاووظ . ثم بفك المسمار عند أ يمكن توضيح أن مجموع أى ضلعين فى مثبت لايكون أكبر من الضلع الثالث .

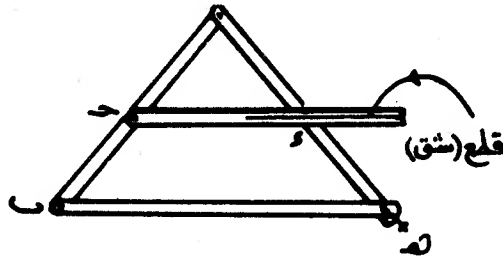


شكل (٤٩)

٤ ــ الوسيلة الرابعة :

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لتوضيح نظرية منصفى ضلعى المثلث .

وتتكون الوسيلة من شرائط من الكرتون تكون مثلثاً (كما فى شكل «٥٠»). حـ ى شريط من الكرتون بقطع (شق) عند ى . نستخدم دبوس رسم لتثبيت الشكل عند هـ فى وضع ما ، ونستخدم دبوس رسم آخر عند ى على أهـ ليسمح بحركة حرة للشريط حـ ى ، حـ ، ى منتصفى الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{أهـ}$ على الترتيب وعلى ذلك بتحريك هـ لأوضاع مختلفة على ب هـ يتضح أن حـ ى // أب و يساوى نصفه .



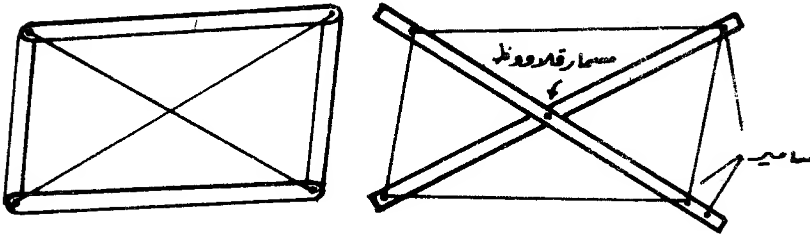
شكل (٥٠)

٥ ــ الوسيلة الخامسة :

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لتوضيح خواص متوازى الأضلاع .

وتتكون الوسيلة من قضيبين متصلين معاً بمسمار قلاووظ عند

مركزيها (منتصفيها): تثبت بعض المسامير فى الأطراف وباستخدام خيط مطاط (أو أستك) حول المسامير المعينة (التى تكون رؤوس متوازى أضلاع أو مستطيل) يمكن تكوين متوازى أضلاع أو مستطيل حيث يكون القضيبان هما القطران. وبتحريك القضيبين نكون أنواع مختلفة من متوازيات الأضلاع حيث يمكن توضيح خواص القطر فى كل حالة. شكل (٥١) أ. ويمكن عمل وسيلة تكون فيها أضلاع متوازى الأضلاع من مادة صلبة ويكون فيها القطران من أستك أو مطاط فى هذه الحالة نستخدم شرائط من الكرتون أو الخشب أو الميكانو التى تحدد شكل الوسيلة (متوازى الأضلاع). شكل (٥١) ب.



(ب) (أ)

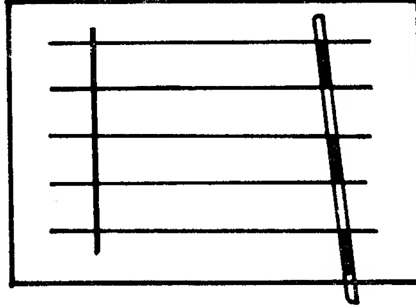
شكل (٥١)

٦ ــ الوسيلة السادسة:

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لتوضيح الأقسام المتساوية.

وتتكون هذه الوسيلة (وعملها سهل) من رسم مستقيمات متوازية بأبعاد متساوية على ورقة كرتون، ورسم مستقيم قاطع. باستخدام شريط أستك (عرض ــ سم تقريبا) أبيض نعلم عليه علامات بتقسيم يساوى المسافة العمودية بين المستقيمات المتوازية عندما يكون الشريط غير مشدود. ثم تلون التقسيمات الغير متتالية باللون الأسود (أى تقسيم باللون الأسود والتقسيم التالى غير ملون وهكذا) ثم يثبت شريط الأستك بحيث أن التقسيمات البيضاء والسوداء تنطبق على المسافات

بين المستقيمات المتوازية عندما يكون الشريط الاستك غير مشدود بشد الطرف غير المثبت للاستك (كما في شكل «٥٢») يمكن توضيح أن الأجزاء المتقاطعة بواسطة المستقيمات المتوازية تكون متساوية في كل حالة.

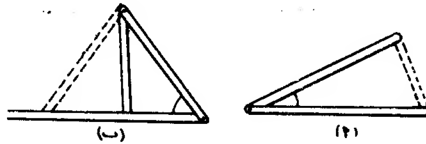


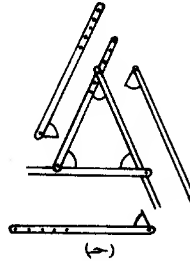
شكل (٥٢)

٧ــ الوسيلة السابعة:

هذه الوسيلة يمكن إستخدامها لتوضيح حالات تطابق المثلثات.

ويمكن عمل الوسيلة من شرائط ميكانو (أو خشب عادى) وقطاعات من ورق الكرتون تمثل الزوايا. وهذه الأخيرة تثبت في الشرائط. الشرائط تمثل أضلاع معطاه في مثلث، القطاعات تمثل الزوايا المعطاه. وبهذا يمكن أن نبين كما في شكل (٥٣) أ أن الضلعين





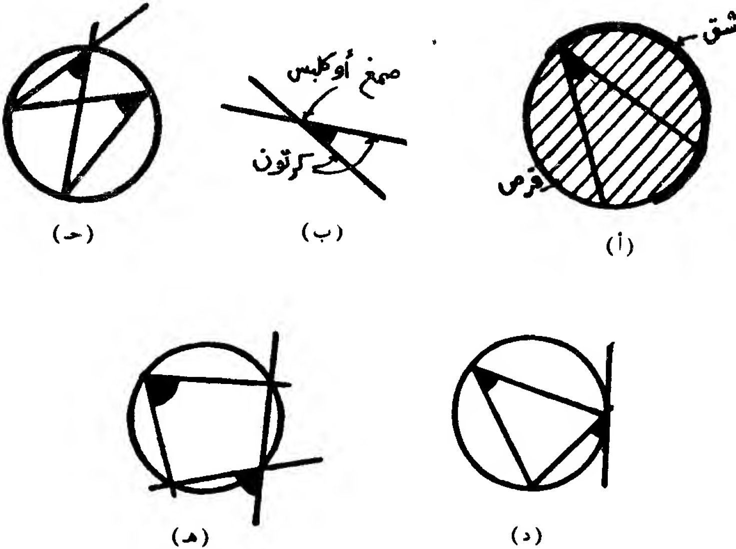
شكل (٥٣)

والزاوية المحصورة فى المثلث تحدد المثلث، وبالمثل بالنسبة للحالات الأخرى. أما شكل (٥٣) ب فيمكن أن يوضح أن ضلعين وزاوية غير محصورة لاتحدد مثلث وحيد. وشكل (٥٣) حـ يوضح أن الزوايا المتناظرة (المتطابقة) لا تكون وحدها شرط التطابق.

الوسيلة الثامنة:

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لنبين أو الزوايا المحيطية على قوس واحد من دائرة تكون متطابقة. كما توضح الوسيلة أيضا النظرية الخاصة بالزاوية بين مماس ووتر أو النظرية الخاصة بالزاوية الخارجة للشكل الرباعى الدائرى.

والوسيلة عبارة عن ورقة كرتون مرسوم عليها دائرة ومرسوم عليها زاوية محيطية وبها قطع (شق) على جزء من محيطها ـ شكل (٥٤) أ؛ وزاوية يمكن تحريكها. ويمكن عمل هذه الزاوية من



شكل (٥٤)

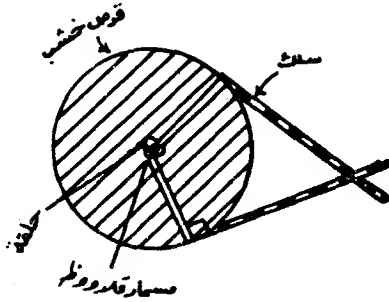
شريطين من الكرتون ملتصقين (بصمغ) عند تقاطعهما. وتوضع الزاوية بحيث يتحرك ضلعاها فى القطع (الشق) و يكون تقاطعهما دائما على محيط الدائرة ـ شكل (٥٤) ب. يمكن وضع الزاويتين على بعضهما لنبين تطابقهما ثم نحرك الزاوية فى الشق لنوضح أن الزاويتين المحيطيتين المنشأتين على قوس واحد متطابقتان ـ شكل (٥٤) حـ. وباستمرار التحريك نوضح النظرية الخاصة بالزاوية بين مماس ووتر كما فى شكل (٥٤) ء؛ ثم النظرية الخاصة بالزاوية الخارجة للشكل الرباعى الدائرى كما فى شكل (٥٤) هـ.

٩ ـ الوسيلة التاسعة:

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لنبين خواص المماسات الدائرة كتوضيح أن المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة يكونان متساويين.

وتتكون الوسيلة من قطعتين من السلك كل منهما ملتوية لتكون زاوية قائمة وملفوفة عند أحد طرفيها على شكل حلقة يمر فيها مسمار قلاووظ. وهناك أيضاً قطعة خشب على شكل دائرة طول نصف قطرها مساوى لطول قطعة السلك الواصلة من الحلقة الى رأس الزاوية القائمة. يوضع السلك على القطعة الخشبية و يثبت بالمسمار القلاووظ عند مركز الدائرة. ومن المناسب أن نلون الضلعين المتدين للسلك باللون الأبيض والأسود فى تدريج مناسب وليكن التدريج كل ١ سم كما فى شكل (٥٧) فى الوضع المبين بالشكل يمكن أن نستخدم الوسيلة لنبين أن المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة يكونان متساويين. واذا جعلنا نصفى القطر على استقامة واحدة فإن الوسيلة تبين أن المماسين عن نهايتى نصفى القطر يكونان متوازيين بينما إذا جعلنا نصفى القطر منطبقين على بعضهما فإننا نبين أن المماس يكون

عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس.

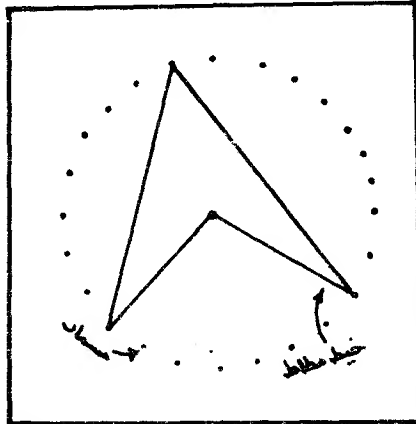


شكل (٥٧)

١٠ــ الوسيلة العاشرة:

هذه الوسيلة يمكن استخدامها لتوضيح خواص الدائرة.

ويمكن عمل الوسيلة من لوحة خشبية مثبت فيها مسامير على أبعاد متساوية على محيط دائرة مرسومة عليها. ويستخدم خيط مطاط أو «أستك» ليمثل المستقيمات (القطع المستقيمة) ويمكن الاستعاضة بهذه الوسيلة بالسبورة إذا كانت خشبية ونرسم عليها دائرة بالطباشير ونثبت دبابيس رسم فى النقط المطلوبة شكل (٥٨).



شكل (٥٨)

١١ ـ الوسيلة الحادية عشر:

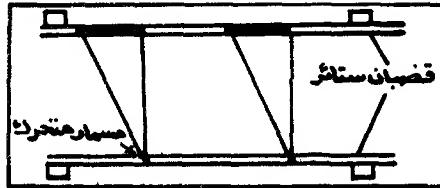
(هذه الوسيلة هى فى الواقع وسيلتان بفكرة مشتركة) .

هذه الوسيلة خاصة بتوضيح خواص متوازى الأضلاع (المتعلقة بالمساحة) والدائرة .

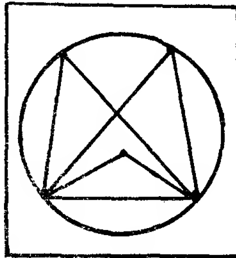
ويمكن عمل الوسيلة من قضبان الستائر النحاسية . ففى شكل (٥٩) أ الوسيلة تتكون من قضيبين متساويين فى الطول من قضبان الستائر مثبتان فى لوحة خشبية بحيث يكونان متوازيين . ويمكن الاستعاضة عن المسامير الجارية فى مجرى قضبان الستائر بمسامير مناسبة يسهل تحريكها وتثبيتها فى المواضع التى يراد تثبيتها فيها عن طريق قلاووظ مناسب .

وهذه الوسيلة توضح خواص مساحة متوازى الأضلاع والمثلث عن طريق أخذ المسامير كنقط متحركة .

أما فى شكل (٥٧) ب فالوسيلة يمكن عملها بطريقة مشابهة . هنا قضيب الستارة يكون على شكل دائرة (يمكن عملها عن طريق لف القضيب حول أسطوانة خشبية مثلا ثم توصيل نهايتى القضيب) . بعد وضع المسامير المناسبة التى ذكرناها (الحرة الحركة والممكن تثبيتها فى المواضع المختلفة) ، تثبت الدائرة على لوحة خشبية ثم نضع مسماراً كبيرا يوضح مركز الدائرة . فى أى من الوسيلتين نلاحظ أنه بواسطة خيط مطاط متصل ، نستطيع تكوين الخطوط المتحركة للأشكال الهندسية المختلفة .



(ب)



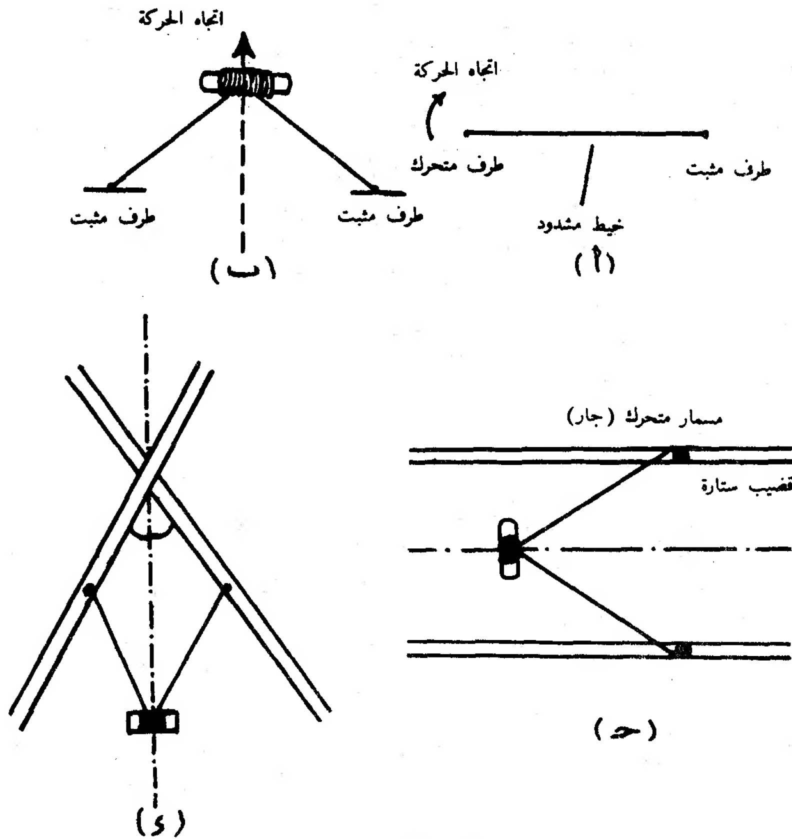
(أ)

شكل (٥٧)

١٢ ــ الوسيلة الثانية عشرة:

هذه الوسيلة تتضمن عدة أفكار لتوضيح مفهوم المحل الهندسى لنقطة متحركة بشروط معينة ونستخدم فى هذه الأفكار خيطا ليمثل الشروط التى تتحرك بها النقطة. فمثلا شكل (٥٨) أ يبين كيف نستخدم الوسيلة فى ايجاد المحل الهندسى لنقطة تتحرك ببعد ثابت عن نقطة ثابتة.

أما شكل (٥٨) ب فيبين إستخدام فكرة الوسيلة فى إيجاد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث تكون متساوية البعد عن نقطتين ثابتتين. وهنا نستخدم خيطين متساويى الطول وبكرة خيط فارغة (ليس بها خيط). ثم نلف الخيطين معاً على البكرة ونربط النهايتين الحرتين



شكل (٥٨)

الخيطين فى نقطتين ثابتتين بواسطة دبوس رسم. بفك الخيطين معا من البكرة بحيث يكون الخيط مشدوداً يتضح المحل الهندسى.

ويمكننا أيضا أن نبين المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث تكون متساوية البعد عن مستقيمين (متوازيين أو متقاطعين). وهنا نستخدم قضيبين من الستائر النحاسية بمساميرها الجارية ونثبتها فى لوحة خشبية بحيث يكون القضيبين متوازيين (أو متقاطعين أى متصلين فى نقطة ما) بأستخدام البكرة الملفوف عليها الخيطين المتساويين فى الطول (التى وضحناها سابقاً)، ويربط النهايتين الحرتين للخيطين بمسمار جار فى بحرى كل قضيب ثم يفك الخيط وهو مشدوداً من البكرة يتضح المحل الهندسى فى كل حالة، كما يتبين من شكل (٥٨) حـ، ى.

****

البــاب الخامس

٥ ــ تدريس تطبيقات الرياضيات

أصبح للرياضيات دورا ذى دلالة تطبيقية فى نمو العلوم الفيزيائية والرياضية والانسانية ... وكل مجالات المعرفة ، وفى نمو الرياضيات نفسها بمجالاتها المتعددة . وكذلك فى الاستخدامات العملية فى الصناعة وفى الحياة اليومية .. وأيضا فى النواحى غير العملية فى حل الفوازير والمغالطات والمباريات فى الرياضيات .

ومن ثم فان تدريس تطبيقات الرياضيات له أهمية كبيرة فى تحقيق أهداف تدريس الرياضيات الخاصة بالنواحى المعرفية والوجدانية على السواء .

ولقد كان الاهتمام فى المناهج المطورة فى بادىء الأمر منذ الستينات (خاصة بالخارج) منصبا على ادخال الرياضيات الحديثة لدورها الأساسى فى التقدم التكنولوجى والآلى وغزو الفضاء . إلا أن وضعها أو تدريسها فى هذه المناهج لم يعكس أهميتها التطبيقية ، بل بالعكس كان الاهتمام مركزا على الفهم للمحتوى الجديد وعلى زيادة التجريد الذى يميز طبيعة هذه الرياضيات ، وعلى استخدام طرق جديدة للتدريس كطرق الاكتشافات . ثم تبع ذلك منذ السبعينات اهتمام بتطبيقات الرياضيات . فأدخلت تطبيقات كأمثلة وتمارين فى الكتب المدرسية ، وزادت العناية بدراسة النماذج الرياضية فى حل المشكلات العملية والتطبيقية . إلا أن هذه التطبيقات فى معظمها مصطنعة وغير واقعية وغير جدية ولا تخلق الدافع فى دراستها . فمسألة ادخال تطبيقات الرياضيات الحقيقية (أو الواقعية) وتدريسها ليست بالأمر السهل بل تحتاج إلى دراسة عميقة وفهم بالرياضيات (المطبقة) وأساليبها كوسيلة لها وظيفة نفعية وإلى معرفة دقيقة ليست بالسطحية بالعلوم الأخرى . فالتطبيقات الحقيقية التى توضح دور الرياضيات فى حل المشكلات التكنولوجية أو

الصناعية أو الحياتية العصرية غالبا ما تكون معقدة وتحتاج إلى وسائل رياضية متعددة صعبة ، وهى وإن كان موجود أمثلة عديدة منها فى المجلات الدورية العلمية إلا أنها مازالت تحتاج إلى تطويع وتعديل لتكون مقبولة ومناسبة فى الكتب المدرسية .

ونقدم فيما يلى فكرة عن بعض التطبيقات الموجودة بالكتب المدرسية المطورة مع مناقشة عيوب بعضها ، ثم نقدم أمثلة لبعض تطبيقات واقعية بسيطة ، ثم نقدم فكرة عن الكمبيوتر و برمجة الكمبيوتر كأحد التطبيقات العصرية . وأخيرا نتعرض لبعض اعتبارات عامة تخص تدريس تطبيقات الرياضيات .

١.٥ ــ تطبيقات فى الكتب المدرسية :

معظم التطبيقات الموجودة فى الكتب المدرسية (خاصة بالخارج) تبين استخدام الرياضيات فى الحياة من خلال التمارين والمسائل (المشكلات) الشكلية . ويمكن تقسيم هذه التطبيقات إلى نوعين :

١ ــ **النوع الأول :** تطبيقات الرياضيات التى لها استخدام مباشر فى الحياة وتختلف فى عمقها وجديتها ، وقد تختلف فى كونها ذات طابع تقريبى أو مضبوط . وتعتمد على معلومات ابتدائية فى الحساب والجبر والهندسة ومعظم رياضيات المرحلة الاعدادية أو الثانوية . وتتنوع المشكلات ، منها ما يخص النواحى الشرائية أو حساب الضرائب على بعض السلع ، ومنها ما يتعلق بحساب كميات لازمة لعمل ما مثل كمية دهان تلزم لدهان غرفة بأبعاد حقيقية أو كمية خشب لازمة لعمل عش (أو قفص) أو كمية من الجلد لعمل شنطة مدرسية أو شراء سجاد بأبعاد سليمة ليغطى مساحة واقعية أو كمية من الشتلات تخص زراعة محصول ما .

وأمثلة من هذه المشكلات (التى لها نظير فى كتبنا) :

(أ) غير تاجر سعر الطماطم من $\widehat{٩}$ قروش للكيلو إلى $\widehat{٢٨}$ قرشا لسعر ثلاثة كيلو . هل رفع أو خفض التاجر السعر؟ وما هى الزيادة أو النقص فى سعر الكيلو؟

(ب) ولد عنده ٨ متر من سلك سور لعمل حظيرة لأرنبه . و يريد أن يستخدم كل السلك . هل يمكن أن يعمل حظيرة طولها ٤ م وعرضها $\frac{1}{2}$ ١ م أو طولها ٤ م وعضرها ٢ م ؟ أعط خمس أمثلة للأطوال والعروض يمكن أن يستخدمها لعمل الحظيرة .

ورغم تنوع مثل هذه الأمثلة وتعبيرها عن مشكلات حياتية قد يقابلها التلميذ أو لا يقابلها بالفعل فى حياته ، إلا أنها أصبحت مكررة وعادية ومألوفة ولا تعكس الجديد ولا الحيوية فى تطبيقات الرياضيات .

٢ ـ النوع الثانى : وهو يمثل الغالبية العظمى للمشكلات الموجودة بالكتب المدرسية التى صيغت لتشبه التطبيقات ، وهى تستخدم الفاظا ولغة من الحياة اليومية أو من مجالات أخرى غير الرياضيات ، إلا أنها فى الواقع لا تمثل تطبيقات حقيقية . وتتميز بوجود صيغ لفظية كثيرة تتطلب ترجمة إلى الرياضيات قبل البدأ فى الحل . وتحتاج إلى تدريب على هذه الترجمة بجانب التدريب على النواحى الرياضية . ونادرا ما تعكس الأمانة أو الا تصال السليم بالعالم الواقعى . فالا تصال غالبا ما يكون خاطىء ومفتعل ، كما يتضح من الأمثلة الآتية :

(أ) مروحة كهربائية تحرك ٣٣٧٥ قدم مكعب من الهواء فى كل دقيقة . كم من الوقت تأخذه هذه المروحة لتغير هواء حجرة أبعادها ٧ ، ٥ ، ١٠ قدم ؟

(ب) متوسط فترة حياة حشائش معينة daisies بعد رشها بمبيد للحشائش هى ٢٤ يوم . إذا كان احتمال الحياة بعد ٢٧ يوم هو $\frac{1}{4}$. أحسب الانحراف المعيارى لفترة الحياة .

(حـ) يمكن أن يقوم سكرتير بعمل ما فى وقت أقل بمقدار ١٠ دقائق عن الوقت الذى يقوم به زميل له بمفرده . إذا اشتغلا معا يمكن أن يقوما بالعمل فى ١٢ دقيقة . كم من الوقت يأخذه كلا منهما إذا قام بالعمل بمفرده ؟

(ى) نفس المسألة السابقة بأعداد مختلفة لنحلتين تمتصان رحيق عدد من الزهور.

فالمثال الأول (أ) قائم على افتراض خاطىء بأن الهواء القديم فى الحجرة يخرج قبل أن يدخلها أى هواء جديد. ولكن فى الواقع يوجد تداخل بين الهواء القديم والمجدد. والمثال (ب) يفترض أن فترات الحياة تتوزع اعتد ليا. ولكى يكون النموذج الرياضى واقعيا يجب أن نتبين أن التوزيع فى خليط من مركبين هما فترات الحياة للحشائش diasies التى تهرب من تأثير كل الرش وتلك التى لا تهرب، وكلا التوزيعين لهذين المركبين غير اعتدالى. أيضا المثال (حـ) أو (ى) لا يتضمن علاقة صحيحة بالواقع لوجود عوامل مختلفة عديدة لعمل شخصين معا وتعاونهما مع بعض وعمل كل واحد بمفرده. إلا أن هذا المثال غير مألوف ويمكن اعتباره وسيلة لتدريب التلميذ على حل مشكلات الجبر (حتى يصل إلى المعادلة $\frac{١٢ ك}{س} + \frac{١٢ ك}{س - ١٠} = ك$ حيث ك كمية العمل).

هذا و يوجد عديد من الأمثلة لهذا النوع الثانى تستخدم لغة الهندسة engineering أو الفيزياء والميكانيكا. كتلك التى تخص أنابيب ذات أقطار مختلفة تفرغ أو تملأ أحواض وحمامات سباحة، أو التى تخص حفر الأنفاق ... ولا تتضمن من الواقع غير الألفاظ ... وكلها تعتمد على ترجمة اللغة فى مجال معين إلى لغة الرياضيات مع اهمال الناحية الواقعية الفعلية، التى تتطلب فى كثير من الأحوال شىء من التقريب.

مثل هذه الأمثلة الشكلية يمكن الاستعانة بها كأمثلة ملموسة لتوضيح الأفكار الرياضية، إلا أنه يجب أن يوضح للتلميذ نواحى التقريب وحدودها وأنها لا تمثل الواقع الحقيقى بالضبط والسبب فى ذلك.

وعموما فهى لا يمكن اعتبارها تطبيقات حقيقية للرياضيات. فالتطبيق الحقيقى يجب أن يكون صادقا بمعنى أن العلاقة بين النموذج الرياضى وما يمثله فى المجال الواقعى يجب أن تكون مفهومة بوضوح.

ومن الخطأ أن نقتصر على الفاظ فى مجال آخر ونكون معادلة تكون مرتبطة وندعى أن ذلك يعد تطبيقا (حقيقيا أو واقعيا) للرياضيات.

٢.٥ ـ تطبيقات واقعية لأنماط عددية وهندسية (للمراحل المبكرة):

تعطى التطبيقات بقصد توضيح استخدام المفاهيم والأفكار الأساسية فى الرياضيات للدراسة فيما بعد، وفى حل المشكلات (فى المجالات المختلفة وفى النواحى الحياتية)، وفى توضيح دور الرياضيات فى النمو الحضارى. فقد تستخدم التطبيقات لاثارة التعلم وكوسيلة لحل المشكلات، وقد تستخدم لتربية تذوق الجمال الرياضى وتنمية تقدير وحب الرياضيات. وتختلف التطبيقات فى مستواها ونوعيتها: من تطبيق روتينى على بعض المفاهيم والقوانين إلى تطبيق على حل مشكلات إلى تطبيق ابتكارى يثير توسعا جديدا للمادة الرياضية أو تطبيقاتها. وقد يكون التطبيق واقعيا أو شكليا.

التلميذ فى البداية يكون محتاجا للتعرف على تطبيقات واقعية بسيطة مشوقة تعطى حياة للأفكار والأنماط العددية والهندسية التى تبين النواحى الجمالية والنفعية للرياضيات بجانب التطبيقات الشكلية الأخرى الموجودة فى الكتب المدرسية.

نقدم فيما يلى بعضا من هذه التطبيقات الواقعية البسيطة والتى يمكن أن يستعين بها المدرس فى تدريسه مباشرة أو بشىء من التعديل لوضعها من ضمن التدريبات أو لتقديمها فى أوقات للاثراء الثقافى والمعرفى والترويحى.

١.٢.٥ ـ أولا: أمثلة لتطبيقات واقعية لأنماط عددية (ومفاهيم عددية):

الأمثلة التى نقدمها توضح استخدام أنماط عددية فى وصف ظواهر طبيعية فى مجالات مختلفة جديدة على التلميذ مثل: البيولوجى ـ

الحفريات ــ الفلك ــ الموسيقى ــ الكيمياء ــ الالكترونيات ــ اللغويات ــ الشفرات ... مع الاشارة إلى الجذور التاريخية لهذا الاستخدام ومن قدمه من الرواد فى بعض الأحيان.

مثال (١):

هذا يعتبر مثال مشوق عن تطبيقات لمتتابعة (متوالية) مشهورة تعرف بمتوالية فيبوناكسى، نسبة إلى الرياضى الايطالى Leonard Fibonacci (١١٨٠ ــ ١٢٥٠) لورد بيزا، الذى قدمها مع مشكلة تدعى لغز الأرانب. اللغز هو: كم أرنب يمكن أن ينتج من زوج واحد من الأرانب فى السنة إذا كان كل زوج ينتج زوجا جديدا كل شهر (مع فرض عدم حدوث موت) والأرانب التى تنتج (تنجب) يكون عمرها شهر؟



فيبوناكسى (١١٨٠ ــ ١٢٥٠)

فى البداية يوجد زوج من الأرانب وبعد شهر يظل زوج ولكنه يكون قادرا على الانتاج. بعد شهرين يوجد زوجين. أحد الزوجين يكون قادرا على الانتاج والزوج الآخر غير قادر. بعد ثلاثة شهور يوجد ثلاثة أزواج. اثنان منهما ينتجان والثالث لا ينتج. بعد أربعة أشهر يوجد خمسة أزواج ... وعندما يوجد ٢١ زوج منهم ثلاثة عشر زوج يكون عندهم شهر وينتجوا ١٣ زوج وباضافتهم إلى ٢١ يكون الناتج ٣٤ زوج ... وهكذا.

يكون الحد الأول من هذه المتوالية ١ والحد الثانى ١، وبعد ذلك كل حد يكون مجموع الحدين السابقين له. (أى $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$ ، $ن \geqslant ١$). وعلى ذلك فمتوالية فيبوناكسى تكون على الصورة:

١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ....

نلاحظ أن الحد الثالث ٢ هو مجموع الحدين السابقين ١، ١.

والحد الرابع ٣ هو مجموع الحدين السابقين ١ ، ٢ ،... والحد الثامن ٢١ هو مجموع الحدين السابقين ٨ ، ١٣ .

تطبيقات لمتوالية فيبوناكسى :

لقد وجد أن أعداد من متوالية فيبوناكسى (أى حدود منها) تعبر عن ظواهر فى الطبيعة فمثلا :

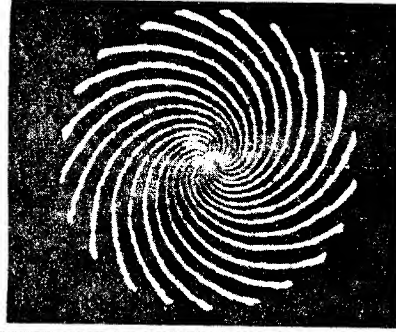
(١) زهرة عباد الشمس لها حلزونات spirals تسير فى اتجاهين مختلفين عدد الحلزونات فى اتجاه والعدد فى الاتجاه المضاد دائما ما يكون حدان متعاقبان من متوالية فيبوناكسى . وكذلك يوجد علاقة شبيهة بالنسبة لأزهار الأناناس وأزهار الديزى daisies (أنظر شكل ١) وفى أزهار نباتات أخرى .

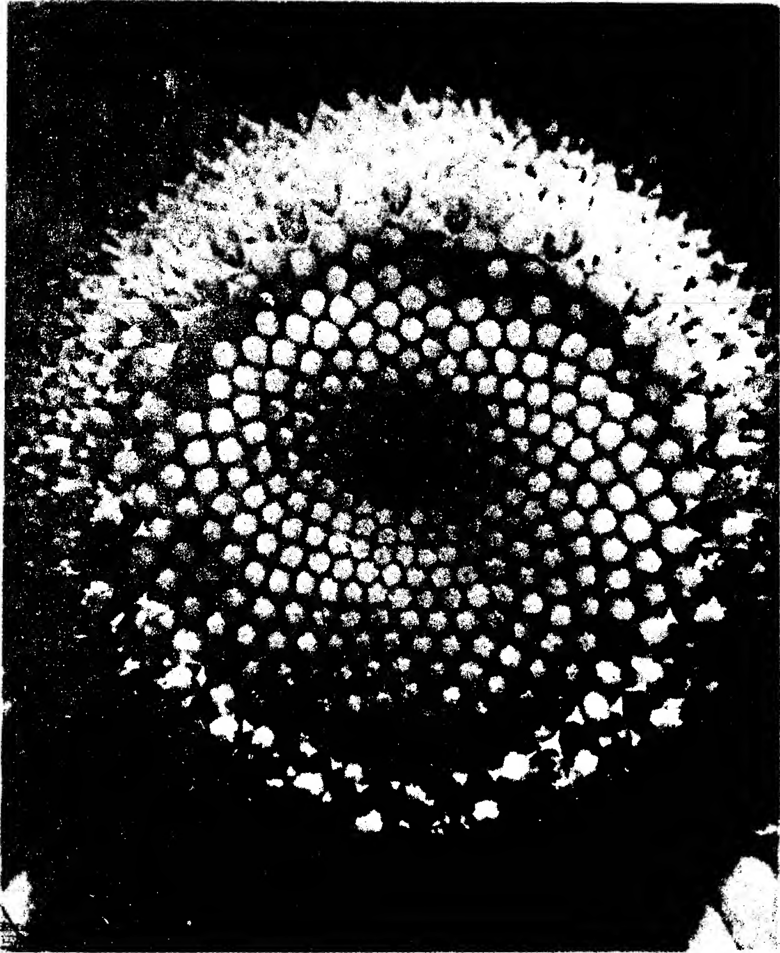
(٢) أعداد ورق petals بعض الأزهار هى أعداد من متوالية فيبوناكسى فمثلا عدد أوراق زهرة الليلى ٣ وزهرة البتركب ٥ وزهرة الدلفينوم ٨ وزهرة الماريجولولد ١٣ وزهرة الأستر ٢١ وزهرة الديزى ٣٤ ، ٥٥ أو ٨٩.. (أنظر شكل ٢).

(٣) يمكن أن تتولد أعداد متوالية فيبوناكسى بدائرة كهربية (كما فى شكل ٣). فاذا مثلنا بمقاومة أوم والتيار فى الفرع الأخير ١ أمبير، فان فرق الجهد يكون عبر المقاومات (من اليمين إلى اليسار) أعداد فيبوناكسيى :

١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ٢١ ، ٣٤ ، ٥٥ ، ...

(٤) إذا ابتدأت متوالية بأى حدين غير ، ١ ، ١ وبحيث يكون كل حد بعد ذلك هو مجموع الحدين السابقين . فان هذه المتوالية تعتبر نوع من متوالية فيبوناكسى . وتسمى متوالية (أو متتابعة) لوكاسى (١٨٤٢ــ١٨٩١) الذى اشتقها من متوالية فيبوناكسى . وقد وجد الفلكيون أن كسوف الشمس وخسوف القمر يتبعان أنماط من الاعادة (التكرار) كل ٦ ، ٤١ ، ٤٧ ، ٨٨ ، ١٣٥ ، ٢٢٣ ، ٣٨٥ سنة . وهذه تكون متوالية لوكاسى (المأخوذة عن متوالية فيبوناكسى) .





شكل (١)

فشتان من الحلزونات الدورانية متكونة من تنظيم الزهيرات Florets في الرأس . يوجد ٢١ حلزون في اتجاه عقرب الساعة ، ٣٤ حلزون في عكس عقرب الساعة (النسبة ٢١ : ٣٤) تناظر نسبة حدين لمتوالية فيبوناكسي .



البمبي الصغير (٥ ورقات)

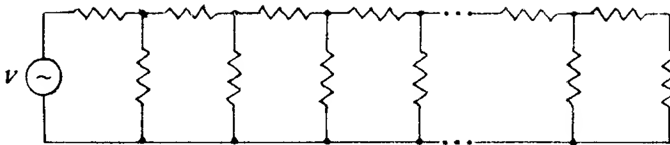


الكوسموس (٨ ورقات)



التيتونيا (١٣ ورقة)

شكل (٢)



شكل (٣)

(حيث V منبع التيار)

مثال (٢):

هذا المثال يوضح تطبيق لأحد المتواليات فى الفلك.

فقد لاحظ الرياضى الألمانى تيتيوس Titius نمط معين من الأعداد، ومنه توصل إلى قاعدة للمسافات المتعاقبة من الكواكب إلى الشمس (سنة ١٧٦٦). ثم وجه النظر إلى هذه القاعدة الفلكى الألمانى بود Bode التى أصبحت تسمى بقانون بود. وقانون بود يرتكز على المتوالية:

٠، ٣، ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨، ...

وإذا أضفنا ٤ إلى كل حد من هذه المتوالية، فالنتيجة هى المتوالية:

٤، ٧، ١٠، ١٦، ٢٨، ٥٢، ...

هذه المتوالية هى قانون بود للمسافات النسبية للكواكب من الشمس. جدول (١) يبين مسافات بود بين الكواكب والشمس ويبين المسافات الحقيقية باعتبار وحدة القياس هى $\frac{1}{10}$ الوحدة الفلكية AU. حيث تناظر AU المسافة بين الشمس والأرض وهى ٩٣ مليون ميل.

وقد اكتشف كوكب Uranus بعد ذلك (١٧٨١) على مسافة ١٩٢ التى تقترب من مسافة بود وهى ١٩٦. إلا أن الكواكب البعيدة نسبيا عن الشمس وجد أنها لا تخضع لقانون بود. فقد اكتشف كوكب بلوتو (١٩٣٠) على مسافة ٣٩٦ بينما المسافة المناظرة لبود هى ٧٧٢.

الكوكب		مسافة بود	المسافة الحقيقية
عطارد	Mercury	٤	٣,٩
الزهرة	Venns	٧	٧,٢
الأرض		١٠	١٠
المريخ	Mars	١٦	١٥,٢
—		٢٨	
المشترى	Jupiter	٥٢	٥٢
زحل	Saturn	١٠٠	٩٥,٣

جدول (١)

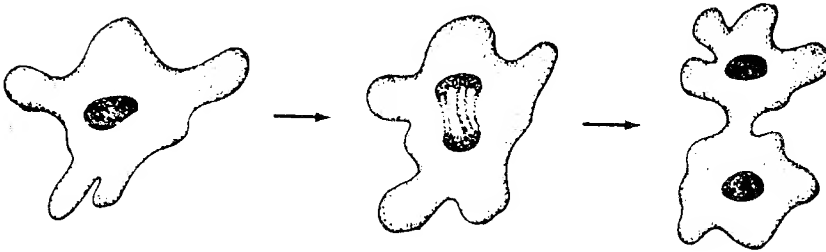
مثال (٣):

هذا المثال يوضح تطبيق المتواليات الهندسية (أو بالأحرى الدالة الأسية) فى وصف تكاثر بعض الكائنات وفى التوصل إلى عمل بعض الكائنات القديمة عن طريق الانحلال فى علم الحفريات archeology، وفى الموسيقى فمثلا:

(١) تتكاثر الأميبا عن طريق انقسامها إلى نصفين. فالأميبا الواحدة تصبح ٢ أميبة. وإذا انقسمت كل أميبة فانها تصير ٤ ... وتستمر العملية بافتراض بيئة مناسبة للتكاثر (نظر شكل ٣).

بفرض أنه عند الومن ز=٠ فى البداية عدد الأميبات هو ١ وأن الزمن يحسب بالأيام نصل إلى:

الزمن ز :	٠	١	٢	٣	٤	٥
العدد ن :	١	٢	٤	٠	....	....



شكل (٣)

(٢) يستخدم التأريخ الكاربونى Radiocarbon dating فى حساب أعمار ما يعثرون عليه Findings فى علم الحفريات. فقد توصل ويلارد ليبى Libby (١٩٤٨) إلى تكنيك يعتمد على الحقيقة بأن كل الكائنات الحية تحتوى على نفس الكمية من ١٤ـ كاربون لكل وحدة وزن. وهى تحصل عليها من الجو عن طريق التنفس. عند موت الكائن لا يحصل على ١٤ـ كاربون. وعلى ذلك فا كمية ١٤ـ كاربون تنحل decays (أى تتحول إلى شكل آخر من الفحم

«الكاربونى»). وتأخذ ٥٧٣٠ سنة لكمية ١٤ــ كاربون لتهبط إلى نصف مستواها الأصلى.. فمثلا بفرض أن الكمية الأصلية ١٤ــ كاربون هى ٦٤جم فان:

الزمن بالسنوات		٥٧٣٠	١١٤٦٠	٢٢٩٢٠
عدد الجرامات ١٤ــ كاربون	٦٤	٣٢	١٦	٨

(٣) البيانو له ثمانية مفاتيح تسمى ج (C). بالابتداء من اليسار كل نوتة متتالية ج لها تردد ضعف تردد ما قبلها. فمثلا تردد النوتة الأخيرة ج أكبر ١٢٨ مرة من النوتة الأولى ج.

مثال (٤):

هذا المثال يوضح أن اللوغريتمات التى اخترعت أساسا لتسهيل الحسابات العددية لها تطبيقات (كدالة لوغريتميه) فى وصف نمو بعض الكائنات.. فمثلا:

(١) فى علم البيئة Echology، دراسة نمو بعض أنواع الناموس أدى إلى القاعدة الآتية لفترة النمو بالنسبة لدرجة حرارة البيئة:

لو$_{١٠}$ ف = أ ــ ب لو$_{١٠}$ ح

حيث ف فترة الحياة لمرحلة النمو، ح درجة الحرارة. أ، ب ثابتان حيث أ حاصل ضرب عدد الأيام فى درجات الحرارة، ب أقل درجة جرارة تسمح بالنمو.

(٢) العلاقة بين عمر ورقة النبات ودرجة الحرارة التى يحدث عندها التمثيل الضوئى تعطى بالقاعدة:

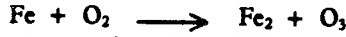
لو$_{١٠}$ح = م + ن لو$_{١٠}$ع

حيث ع عمر الورقة بالأيام، ح الدرجة التى يحدث عندها التمثيل الضوئى. م، ن ثابتان يعتمدان على الموضع.. فمثلا وجود النبات فى وجه بحرى أو قبلى.

مثال (٥):

هذا المثال يوضح استخدام المضاعف المشترك الأدنى لموازنة معادلة كيميائية:

(١) يتفاعل الحديد مع الأكسجين ليعطى صدأ الحديد (أكسيد الحديديك) المعادلة لهذا التفاعل:



لوزن هذه المعادلة لابد أن يكون عدد ذرات الأكسجين فى الطرفين واحدة، وهو ٢ على طرف وثلاثة على طرف. م.م.أ هو ٦ بضرب O_2 فى ٣، ضرب Fe_2O_3 فى ٢ ينتج:



ولو أن كمية الأكسجين توازنت إلا أن كمية الحديد لم تتوازن بعد. وحيث أنه يوجد ذرة حديد فى طرف ٢ وأربعة فى الطرف الثانى، وحيث أن م.م.أ للعددين ١، ٤ هو ٤ فان المعادلة تتزن عندما:



مثال (٦):

هذا المثال يوضح تطبيق الحساب ذو المقياس modular arithmetic ـ الذى قدمه جاوس (١٧٧٧ ـ ١٨٥٥) ـ فى معرفة اليوم الذى يقع فيه تاريخ معين وفى عمل شفرة، كما يتضح مما يأتى:

(١) باستخدام الأعداد الصحيحة مقياس ٧ يمكن تعيين أى يوم من الأسبوع يقع فيه تاريخ معين سواء مضى أو آت. فكثيرا ما نشتاق لمعرفة اليوم الذى ولدنا فيه أو يوم له ذكرى معين. بالطبع أى يوم خاص لا يقع فى نفس اليوم كل عام، لأن عدد الأيام فى السنة ٣٦٥ (أو ٣٦٦) لا تقبل القسمة على ٧ وهى عدد أيام الأسبوع. إذا قسم ٣٦٥ على ٧ فالباقى ١. وعلى ذلك فعدد الأيام فى السنة البسيطة يطابق ١ مقياس ٧ أى:

٣٦٥ ≃ ١ (مقياس ٧)

وأيضا عدد الأيام فى السنة الكبيسة يطابق ٢ مقياس ٧ أى :

٣٦٦ $\simeq$ ٢ (مقياس ٧)

وهذا يعنى أنه يكون تغير إلى ٣٦٥ يوم هو تغير يوم واحد لأيام الأسبوع ، وهذا يعنى بالتالى أنه للسنة البسيطة يزيد يوم الأسبوع لتاريخ معين يوما واحدا فى السنة المقبلة .

فمثلا إذا كان ١٦ أكتوبر يقع فى يوم الثلاثاء فى سنة ما فانه يقع فى يوم الأربعاء السنة التالية ، وبالعكس يقع فى يوم الأثنين السنة الماضية .

وحيث أن الأسبوع يتغير باثنين للسنة الكبيسة ، فيجب عمل حساب للسنوات الكبيسة .

ولتحديد أيام الأسبوع يجب أن يكون أمامنا نتيجة لسنة ما (حتى ولو كانت نتيجة السنة الحالية) ، كمرجع فى البداية . وببساطة إذا لاحظت أن ١٦ أكتوبر ١٩٧٧ كان يوم أحد فانه يمكن تعيين اليوم الذى يقع فيه ١٩٨٥ . نلاحظ أنه من سنة ١٩٧٧ إلى سنة ١٩٨٥ ثمانية سنوات ، اثنان منها كبيسة (هى ١٩٨٠ ، ١٩٨٤) . وعلى ذلك فيوم الأسبوع يتحرك ١٠ أيام (٦ أيام بواقع يوم كل سنة بسيطة وأربعة أيام بواقع يومين كل سنة كبيسة) . وهذا يعنى أن ١٦ أكتوبر ١٩٨٥ سوف يكون يوم أربعاء .

(٢) الكريبتوجرافى Cryptography هو فن الكتابة السرية أى كتابة الرسائل باستعمال شفرة . وتستخدم طرقها أيضا فى أنظمة الكمبيوتر (الحاسب الالكترونى) الحديثة لمنع أى شخص (غير مسؤول) من الحصول على معلومات سرية من أوراق الكمبيوتر لجهة ما . ويوجد ثم تكنيكين أولين لتحليل الكتابة السرية Crypianahysis أحدهما قائم على توزيع تكرار حرف الهجاء . الآخر يتضمن استخدام الحساب ذو المقياس أو بالأحرى حساب الأعداد الصحيحة مقياس ٢٦ ، وهو ما سوف نوضحه فيما يلى :

استخدم جوليوس كيسار Caesar (١٠٠–٤٤ ق.م) نظام معين فى كتابة الخطابات، يستبدل فيه كل حرف أصلى بحرف مزاح بعده بثلاثة أماكن. يعرف نظامه الآن بشفرة كيسار Caesar Cipher

الحروف الأصلية	X Y Z	....	A B C D
شفرة كيسار	A B C	....	D E F G

وبهذا يمكن كتابة أى رسالة بهذه الشفرة أو فك هذه الشفرة إما بازاحة الحرف ثلاث أماكن بعده أو ثلاثة أماكن قبله. فمثلا إذا كانت:

الرسالة الأصلية BEWARE THE IDEAS OF MARCH

فانها بالشفرة تكون EHZDUH WKH LGHDV RI PDUFK

وإذا مثلنا كل حرف من الهجاء بالأعداد

A B C D E	....	X Y Z	
1 2 3 4	.....	24 25 26	

فان الترجمة إلى الشفرة وبالعكس تكون أسهل فمثلا:

إذا كانت الرسالة ET TU BRUTE

فان ترجمة خطواتها إلى الشفرة تكون:

باستبدال الحروف بالأرقام	5 20 20 21 2 18 21 20 5
باضافة ٣	8 23 23 24 5 21 24 23 8
باستبدال الأرقام بالحروف	H W W X E U X W H

ويظهر دور الأعداد الصحيحة مقياس ٢٦ عندما نريد أن نستبدل:

	X Y Z
باستبدال الحرف بالأرقام	24 25 26
باضافة ٣	27 28 29
باستبدال الحرف	؟ ؟ ؟

وهنا نلاحظ أن X التى يمثلها ٢٤ تصير A التى يمثلها ١ وليس

٢٧، وكذلك Y التى يمثلها ٢٥ تصير B التى يمثلها ٢ وليس ٢٨ أى أن

٢٧ ≃ ١ (مقياس ٢٦)

٢٨ ≃ أ (مقياس ٢٦)

مع ملاحظة أننا نستخدم ٢٦ بدلا من صفر إذا كان الباقى صفر.

ونلاحظ أننا قد نحصل على أعداد سالبة عند ترجمة الرسالة بالشفرة إلى الرسالة الأصلية.. فمثلا:

الرسالة بالشفرة	A	B	C
بالاستبدال بالاعداد	1	2	3
بطرح ٣	-2	-1	0
بالاستبدال بالحروف	?	?	?

ولكن A, B, C بالشفرة تناظر X Y Z، X يمثلها ٢٤ (وليس ــ٢)، Y يمثلها ٢٥ (وليس ــ١)، Z يمثلها ٢٦ (وليس صفر).

وعلى ذلك وكما نعلم:

ــ٢ ≃ ٢٤ (مقياس ٢٦) حيث أن ــ٢ــ٢٤ = ــ٢٦ وهذه تقبل القسمة على ٢٦. وعلى ذلك إذا ظهر فى الشفرة أعدادا سالبة فانها تحول إلى أعداد موجبة باضافة ٢٦.. فمثلا:

ــ٢ ← ــ٢ + ٢٦ = ٢٤ قبل ترجمتها بالحروف التى تمثلها

٢.٢.٥ ــ ثانيا: أمثلة لتطبيقات واقعية لبعض أنماط (مفاهيم) هندسية:

تستخدم الأنماط والمفاهيم الهندسية فى وصف وتفسير ومعرفة الأساس الرياضى للأشكال forms فى عالمنا الطبيعى من جهة. ومن جهة أخرى تأثر الفن والعمارة منذ آلاف السنين بالهندسة، كما أسهمت الهندسة بوسائلها ونظرياتها فى نمو وخدمة معظم العلوم وتطبيقاتها العملية والفنية والتكنية.

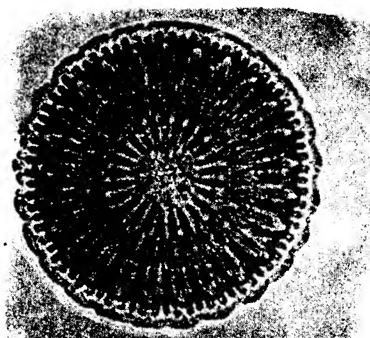
نقدم فيما يلى بعض آمثلة توضح استخدام الهندسة فى توضيح الأساس الرياضى أو وصف الشكل فى الطبيعة، واستخدامها فى الانشاءات، وفى الطب وفى علم المعدنيات (الأملاح المعدنية)، وفى الهندسة الكهربية بأسلوب مبسط.

مثال (١):

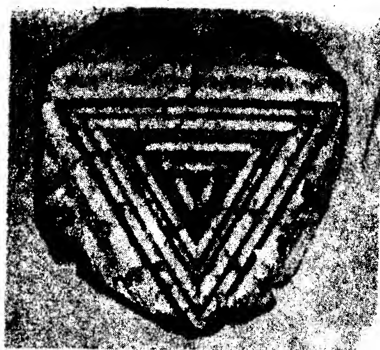
هذا المثال يبين أهمية الهندسة فى وصف وتفسير الأشكال forms لأنماط هندسية بديعة موجودة فى الطبيعة Nature. فعالمنا الطبيعى يزخر بمخلوقات ومكونات لها مختلف الأشكال الهندسية البسيطة المركبة فى تنظيمات رائعة أخاذه تعكس السحر الجمالى للرياضيات فى الطبيعة، فمثلا:

(١) شكل «٤» يبين بعض الأشكال الهندسية البسيطة: الدائرة ــ المثلث ــ المكعب ــ المسدس ــ النجمة فى الطبيعة. فشكل «٤ ــ أ» يبين النبات البحرى الميكروسكوبى الدائرى دياتم diatum. شكل «٤ ــ ب» يبين الجوهرة المثلثة ــ مقطع لأحد الأحجار الكريمة. شكل «٤ ــ جـ» يبين البلورات التكعيبية المتداخلة لأحد مركبات كبريت الحديد. شكل «٤ ــ د» يبين البلورات الثلجية السداسية المتعددة قبل تجميعها لشكل معين (هو Flakes Six Spoked). شكل «٤ ــ هـ» يبين الخلايا الشمعية السداسية للنحل. شكل «٤ ــ و» يبين السمكة النجمية الخماسية.

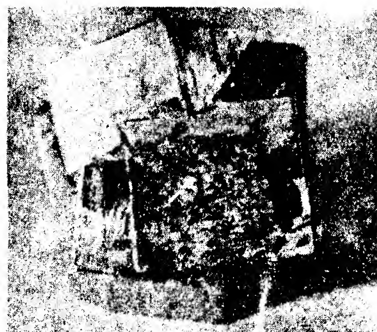
(٢) أشكال هندسية غير بسيطة كمختلف الحلزونات الموجودة فى مخلوقات كثيرة. فالحلزون (أو بالأحرى الحلزون اللوغاريتمى، ومعادلته لو ں = أ ϕ حيث ں متجه نصف القطر، ϕ الزاوية المتجهة) الموضح فى شكل «٥ ــ أ» (حيث يتقاطع منحنى الحلزون مع أنصاف الأقطار الممتدة اليه فى زوايا متطابقة) تحدث فى أنياب الفيل، وفى قرون الأكباش. وكذلك فى بعض أصداف القواقع كما هو فى شكل «٥ ــ ب». كما أن الحلزون موجود فى بعض الأزهار كما بينا



(أ) نبات دائرى



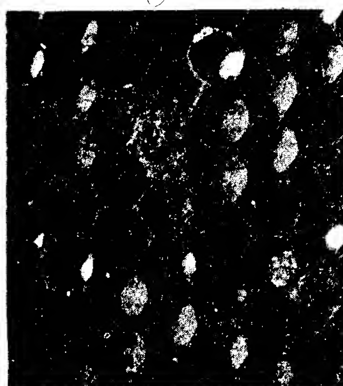
(ب) الجوهرة المثلثة



(حـ) البلورة المكعبة



(د) شكل بلورات ثلجية سداسية

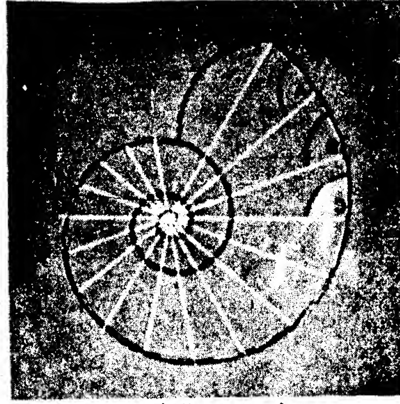


(هـ) خلايا عسل النحل السداسية



(و) السمكة النجميـة

شكل (٤)



(أ) الحلزون اللوغاريتمى

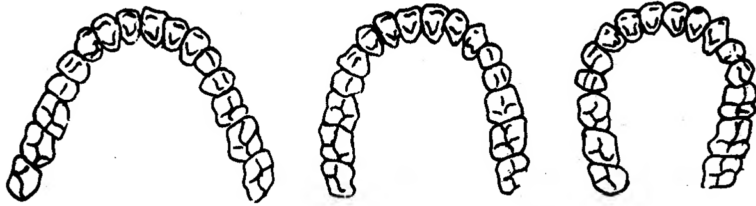


(ب) القوقعة الحلزونيه

شكل (٥)

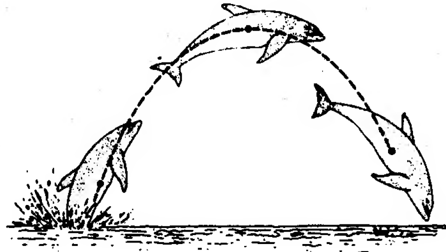
بالنسبة لزهيرات زهرة الديزى فى شكل (١) السابق وزهرة عباد الشمس.

(٣) القطوع المخروطية (الزائدية ــ المكافئة ــ الناقصية) موجودة فى شكل الفك الأعلى للانسان. كما هو واضح فى شكل «٦ ــ أ». مسار مركز ثقل درفيل يقفز أيضا يكون على شكل قطع مكافىء. أنظر شكل «٦ ــ ب».



زائـد مكافىء ناقص

(أ) الفك الأعلى للانسان

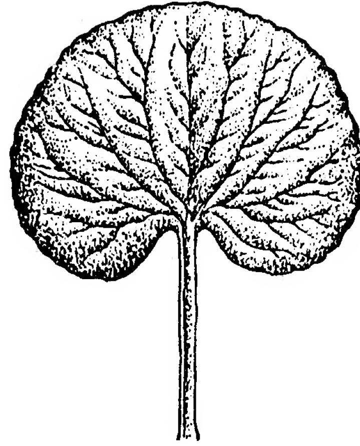


(ب) مكافىء

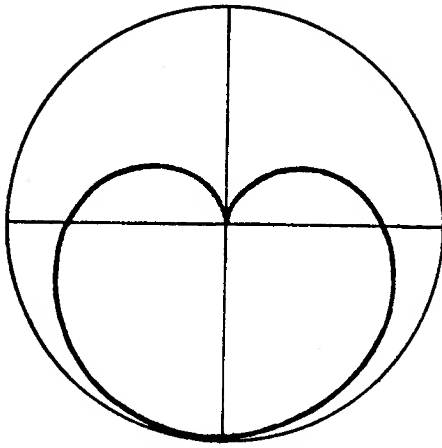
شكل (٦)

(٤) زهرة البنفسج Violet لها ورقة (بشكل الكلية) يمكن وصفها بمنحنى الجيب. معادلة المنحنى لها الموضح فى شكل «٧ ــ ب» هى ى = حا $\frac{\theta}{٢}$. وهى الصورة القطبية، حيث و أ هو المحور القطبى. شكل الورقة فى «٧ ــ أ».

(٥) الراديولاريان Radiolarian وهى كائنات بحرية دقيقة جداً، لها هياكل مركبة skeletal structure تقترب من كثيرات السطوح

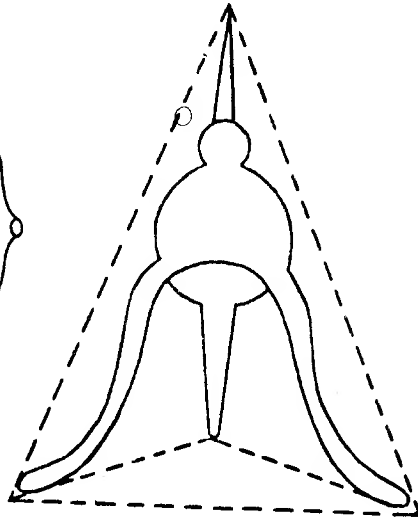


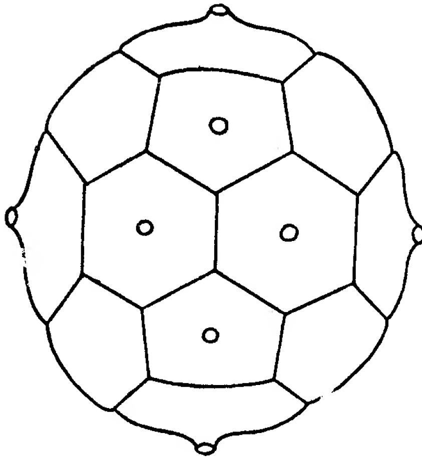
(أ)



(ب)

شكل (٧)





شكل (٨)

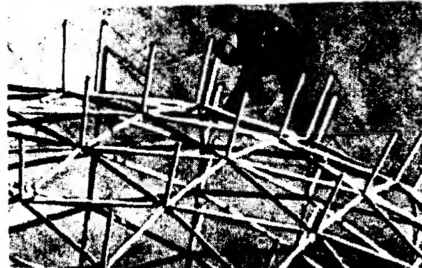
(المجسمة) المنتظمة regular polyhedra . فالهيكل مكون من السليكات silica المبلورة فى تركيبها الدقيق. فمثلا نوع من الراديولاريان هو كثير السطوح المنتظم (١٢ وجه خماسى). ونوع آخر كثير سطوح منتظم من ٢٠ وجه مثلثى.. وهذه لا يمكن أن تكون أشكال بلورية لأنها لا تخضع لقانون الأسس القياسى الذى يحكمها ــ أنظر شكل (٨).

مثال (٢):

هذا المثال يوضح استخدام الأنماط والمفاهيم الهندسية فى العمارة والانشاءات والهندسة الكهربية، فمثلا:

(١) استغل الانسان الأشكال الهندسية فى أعمال خلاقة فى العمارة. شكل «٩ـ أ» يبين كيف استعمل فولكر Fulker فى بناؤه الكروى المشهور بكاليفورنيا آلاف من المثلثات متساوية الأضلاع المتصلة مع بعضها البعض للوصول إلى أقصر طريق ــ من دائرة عظمى geodisc ــ على السطح الكروى لهذا البناء. والنتيجة هى تزاوج للنواحى النفعية مع النواحى الجمالية للرياضيات.

(٢) استخدام نوافذ مستطيلة تقريبا لتملأ مساحة تحت سقف منحنى لبناء MIT فى ماسوشيت، وضح فيها مهندسه التكنيك الذى يستخدم فيه التكامل ايجاد مساحة تحت منحنى. كما هو موضح فى شكل «٩ ــ ب».



(أ)

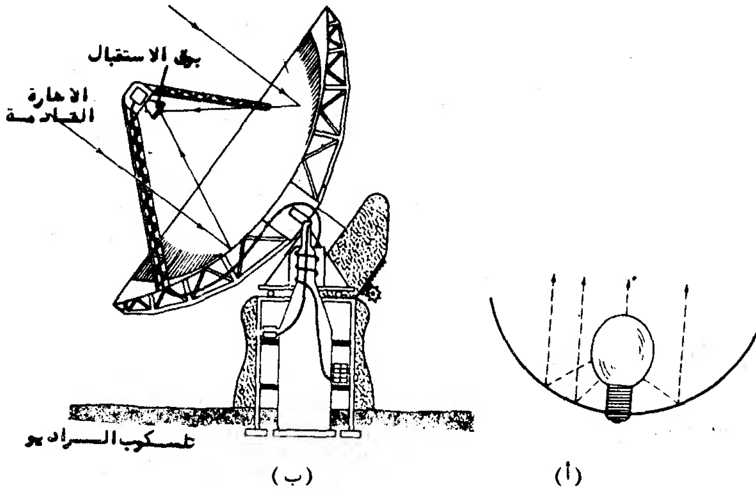


(ب)

شكل (٩)

(٣) يوجد استخدامات كثيرة لأشياء ذات شكل مكافىء shaped parabola أنوار العربات، والأضواء الكاشفة لها مرايا مكافئة parabolic. وهنا يوضع منبع الضوء (اللمبة) فى بؤرة القطع المكافىء

حتى تنعكس متوازية. التلسكوبات العاكسة تستخدم المرايا العاكسة لتركز كمية الضوء الواصلة من الأجسام الخافتة فى السماء. موجات الراديو والتليفزيون تفقد بأقل ما يمكن عندما تأتى من بؤرة جهاز الارسال المكافىء. بالمثل الايريال ذو الشكل المكافىء للراديو والتليفزيون وتلسكوب الراديو يساعد فى انتاج اشارة signal قوية عند بؤرة الاستقبال. أنظر شكل (١٠).



شكل (١٠)

مثال (٣):

هذا المثال يوضح استخدام العمليات والوسائل الهندسية البسيطة فى العمارة والمساحة (أو بالأحرى قياس أبعاد للكرة الأرضية) والمعدنيات meneralogy. فمثلا:

(١) استخدم قدماء المصريين بعض العمليات الهندسية الأساسية فى بناء الأهرامات. فيعتقد أنهم استخدموا رسم المنصف العمودى على القطعة المستقيمة الواصلة بين موضع مشرق الشمس ومغربها (عند يومى تساوى الليل والنهار)، حتى يكون موضع الأهرامات مواجهة بالضبط إلى الشرق والغرب والشمال والجنوب، كما نوضح فى شكل (١١).

الشرق

الشمال

الجنوب

الغرب
(الغروب)

شكل (١١)

(٢) استخدم أحد العلماء اليونانيين القدماء و يدعى إيراتوثينيز Eratosthenes (٢٧٦–١٩٤ ق.م) فكرة التوازى فى مقياس محيط الكرة الأرضية فوجدها ٢٤٦٦٢ ميل بخطأ يقل ٢٪ عن المحيط الحقيقى وهو ٢٤٩٠٠ ميل. فقد لاحظ أن الشمس فوق الرأس تماما عند الظهيرة فى اليوم الأول من الصيف عند أسوان (وكانت أسوان تسمى سين Syene). أى لا يوجد ظل بالمرة. وفى الظهيرة عند اليوم الأول للصيف Summer Solitice (عند تساوى الليل والنهار) قاس الزاوية أ فى شكل (١٢)، وهى الزاوية بين عمود رأسى والشعاع من قمته إلى آخر ظله فى الاسكندرية فوجدها ١٢ ٧° أى حوالى $\frac{١}{٥٠}$ من كل المحيط.

أ
ل ٢
الاسكندرية
ب
جـ
ل ١
أسوان
الارض
الشمس

شكل (١٢)

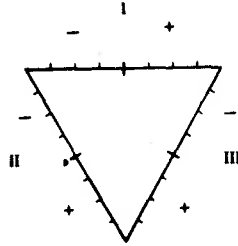
بفرض أن الأشعة متوازية فان أ = ب. وعلى ذلك فالمسافة بين أسوان والاسكندرية والتى كانت معروفة بأنها ٥٠٠٠ من وحدة قياس

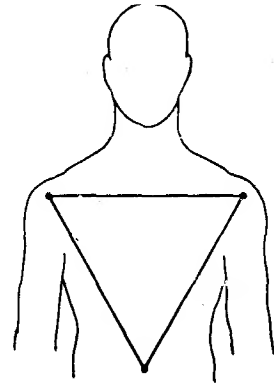
مسافات يونانية قديمة تسمى ستيديا studia . واستنتج ابراتوثينيز من ذلك أن محيط الأرض ٢٥٠,٠٠٠ ستيديا أى ٢٤٦٦٢ ميل. أنظر شكل (١٢) حيث حـ مركز الأرض.

(٣) لا تقتصر تطبيقات الهندسة فى عمل التصميمات وبناء الأهرامات وفى العمارة والمساحة ولكن تمتد إلى العلوم الأخرى كالطب (الهندسى). ونقدم هنا تطبيق لبعض العمليات الهندسية فى تحديد موضع قلب الانسان عن طريق استخدام مرسام القلب الكهربائى Electrocardiogram (EKG) . وهو آلة تسجل الاختلافات فى التيارات الكهربائية الناشئة عن انقباضات مختلف عضلات القلب ويسمى ما تسجلهَ الآلة رسما قلبيا كهربائيا. وبالتحديد يستخدم مرسام القلب لقياس الأنشطة الكهربائية للقلب بالنسبة إلى ثلاثة نقط. هذه النقط (أو ما تسمى بالوصلات) هى عند الكتف اليمنى I ، وعند الكتف اليسرى II ، وعند السرة navel III . وهى تكوِّن رؤوس مثلث متساوى الأضلاع يعرف باسم مثلث إنثوفن Einthoven (نسبة إلى العالم الألمانى مخترع المرسام EKG الحديث). هذا المثلث يستخدم لتحديد موضع القلب أى لايجاد ميله. أنظر شكل (١٣ ـــ أ).

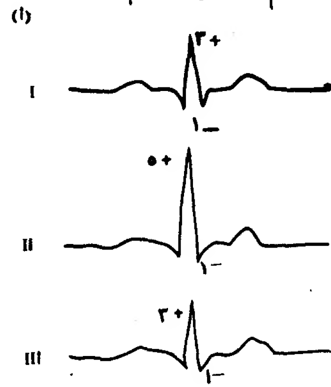
المعلومات التى نحصل عليها من المرسام يمكن رسمها على المثلث. المعلومات التى نحصل عليها عند كل وصلة تتكون من انحراف علوى (+) وسفلى (ـــ). فمثلا قد تُبين الوصلة I انحراف علوى ٣ وسفلى ١ . محصلتهما +٣ـــ١ = +٢ وهى تظهر على المرسام كما فى شكل (١٣ ـــ ب).

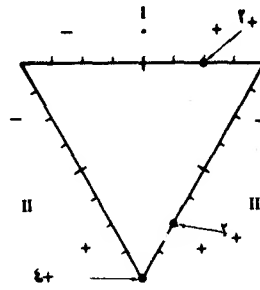
وبفرض أن محصلة الانحراف عند الوصلات الأخرى II ، III هى على الترتيب +٤ ، +٢ (أنظر شكل «١٣ ـــ ب»). فيمكن تمثيل الانحرافات عند I ، II ، III على مثلث بنقط كما فى شكل (١٣ ـــ حـ). تحدد نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من





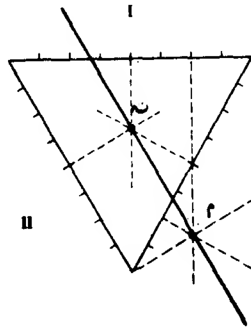
(أ)

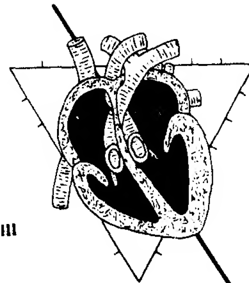




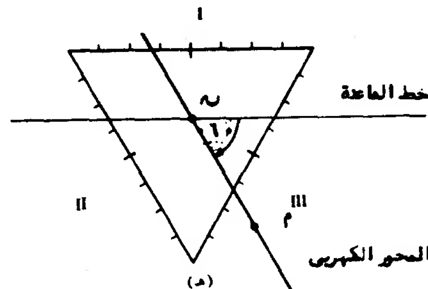
(ب)

(جـ)





(د)

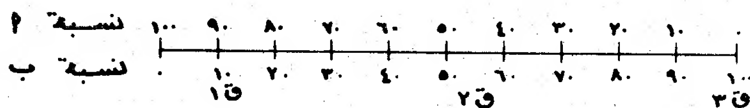


(هـ)

شكل (١٣)

هذه النقط. ولتكن نقطة التقاطع م. يعين تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها ولتكن عند نقطة ن. الخط الواصل بين م، ن يسمى المحور الكهربائى للقلب وهو يبين الزاوية التى يقع عليها القلب كما فى شكل (١٣ ــ د). يمكن قياس زاوية القلب الواقعية، وهى الزاوية بين المحور الكهربائى وخط القاعدة ــ وهو الخط المار بنقطة ن ويوازى الضلع I كما فى شكل (١٣ ــ هـ).

(٤) كما بينا تطبيق العمليات الهندسية على مثلث اينثوفن فى الطب، نوضح استخدام المثلثات المتساوية الأضلاع كوسائل فى المعدنيات Mineralogy. وعلم المعدنيات هو دراسة المعادن Minerals التى تكوّن عناصرها ومركباتها الأجزاء الصلبة من الأرض. ومن ضمن عمل المتخصص فى هذا المجال دراسة مكونات الصخور. إذا تكون المعدن Mineral من مركبين Compounds، يمكن تمثيله على خط بيانى يسمى بالنظام الثنائى (البيانى) كما فى شكل (١٤). فمثلا إذا كانت ثلاثة معادن س، ص، ع تتكون كل منها من مركبين أ، ب بحيث نسبة أ للمعدن س هى ٩٠٪ ونسبة ب له هى ١٠٪، ونسبة المركب أ للمعدن ص هى ١٠٪، ونسبة المركب أ للمعدن ع هى ٤٥٪ ونسبة ب له هى ٥٥٪. يمكن تمثيلها بالنقط ق١، ق٢، ق٣ على الترتيب كما فى شكل (١٤).

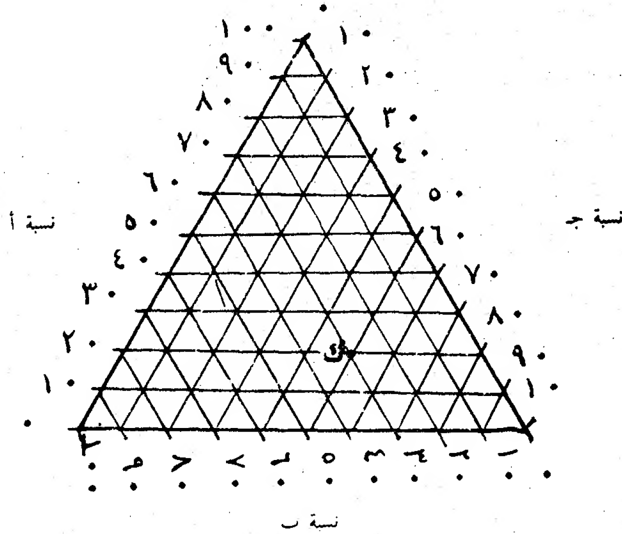


شكل (١٤)

المعادن التى تتكون من ثلاثة مركبات يمكن تمثيلها بالنظام الثلاثى (البيانى) أو المثلث البيانى triangle graphce. الشكل البيانى للنظام هو مثلث متساوى الأضلاع يتكون من المركبات الثلاثة أ، ب، حـ.. أنظر شكل (١٥).

بأخذ المعدن ك التى تتكون مركباته أ، ب، حـ بنسب ٢٠٪،

٣٠٪، ٥٠٪ على الترتيب فيمكن عند النقطة ك فى شكل (١٥).. وهى تقاطع الخطوط عند ٢٠٪ أ، ٣٠٪ ب، ٥٠٪ حـ. و يستخدم العاملين بهذا العلم الأنظمة الثنائية والثلاثية كثيرا فى عملهم. كما يوسعون الأشكال البيانية فيستخدموا أشكال بيانية بثلاثة أبعاد. وتستخدم الأنظمة الثلاثية فى مجالات أخرى غير علم المعادن مثل علم البيئة echology وغيرها بنفس الفكرة.



شكل (١٥)

٣.٥ ــ الكومبيوتر كأحد التطبيقات التى أثرت فى النمو الحضارى المعاصر:

أحدث الكومبيوتر (الحاسب الالكترونى ــ العقل الالكترونى) تغييرا فى المجتمع المعاصر تقارن بما أحدثته الثورة الصناعية. فنحن الآن نعيش فى عصر العقول الالكترونية، ترشد رواد الفضاء فى مساراتهم الفلكية، وتعاوننا فى تصميم الكبارى الجديدة..، وتساعد فى عمل القرار فى الحكومة وفى التعليم وفى العلوم الحربية والعلوم الادارية..، وتساعد على الوصول إلى تحليل البيانات بسرعة والوصول إلى نتائج

البحوث العلمية، وتساعد على التشخيص وعمل القرار فى الطب والقانون والهندسة، ويستعين بها السيكلوجيون والمؤرخون واللغويون وحتى منظمو الشعر والموسيقى فى أعمالهم..، ويسهم فى ايجاد حلول لمعادلات تفاضلية وتكاملية ولمشكلات فى التحليل العددى فى الرياضيات. وعموما أصبح للكومبيوتر استخدامات واسعة متعددة فى أرجاء الحياة لدرجة أصبحت معها الحياة مستحيلة بدونه. ففى المدرسة يمكن أن يستخدم الكومبيوتر فى عمل الجداول وفى الحسابات والماهيات والمصروفات من جهة ومن جهة أخرى يمكن استخدام برمجة الكومبيوتر فى تدريس المفاهيم وحل المشكلات فى الرياضيات.

ونظرا لأهمية الكومبيوتر وإلى الحاجة إلى مدربين عديدين عليه، فقد أوصى البعض بتدريسه. وينقسم تدريس علوم الكومبيوتر عادة إلى ثلاثة أقسام: (١) برمجة الكومبيوتر Computer programming ؛ (٢) معالجة البيانات Data processing ؛ (٣) وتصميم الكومبيوتر Computer design وقد أقترح أن يكون تدريس برمجة الكومبيوتر من مسؤلية أقسام الرياضيات، بينما معالجة البيانات من مهمة أقسام الادارة والأعمال لتدريسها، أما تصميم الكومبيوتر وصيانته فيجب أن تكون مسؤلية الأقسام الصناعية والهندسية.

ومن الأسباب التى تبرر ادخال برمجة الكومبيوتر كجزء من مناهج الرياضيات:

(١) لغة الكومبيوتر مبنية على أنظمة عددية غير النظام العشرى.
(٢) الشبكات المنطقية مبنية على جداول الصدق والجبر البولى.
(٣) برامج الكومبيوتر غالبا ما ترتكز على خرائط سير (انسياب) كتلك المستخدمة فى حل المشكلات. وعلى ذلك فدراسة الكومبيوتر ودراسة حل المشكلات يعضد بعضها البعض.
(٤) عمليات الكومبيوتر تتضمن كل العمليات الرياضية.
(٥) شفرة لغة الكومبيوتر تشبه لغة الرياضيات المجردة.

(٦) معرفة تكتيكات هذه الوسيلة الهامة تساعد على توسيع القاعدة التدريبية للمدرس .

(٧) مدرس الرياضيات عنده الخلفية والميل لكي يكون تدريس برمجة الكومبيوتر ناجح .

(٨) تساعد برمجة الكومبيوتر على تحقيق أهداف خاصة بتعلم حل المشكلات وترجمة الأفكار الرياضية بلغة أخرى واعطاء بصيرة بالاجراءات الرياضية ومعنى كل خطوة فيها وأهمية ترتيبها .

وعلى ذلك من المهم أن يأخذ المدرس فكرة مبسطة عن الكومبيوتر وبرمجة الكومبيوتر حتى يمكن أن يقدمها للتلميذ فى المرحلة الاعدادية أو الثانوية كاثراء معرفى أو كتطبيق للرياضيات لحين ادراجها فى المنهج ، وهذا ما سوف نوضحه فيما يلى .

١.٣.٥ — فكرة مبسطة عن الكمبيوتر:

البحث عن آلات تحرر المفكرين من التعب المضنى فى الحسابات المعقدة ابتدأ من قرون مضت ، ولكن لم يكن قبل الاربعينات فى هذا القرن أن صمم وبنى الكمبيوتر وتوالى تحسينه وتطويره بعد ذلك .. ففى القرن الـ١٧ صمم نابيير جهازه لتسهيل الضرب ، وقدم باسكال وهو فى التاسعة عشرة من عمره ماكينة للجمع والطرح . وفى عام ١٨١٨ حاول العالم الانجليزى باباج Babbage تطويرها لصنع الماكينة الحاسبة التفاضلية لتقوم بحل المعادلات ولكن محاولته لم تنجح . وفى عام ١٨٩٠ استطاع المهندس الامريكى هوليريث أن يبتدع وسيلة ميكانيكية لتسجيل البيانات ومعالجتها وتبويبها . واستطاع العالم الأمريكى بوش Bush أن يبنى كمبيوتر ميكانيكى لحل المعادلات التفاضلية . ثم جاءت الحرب العالمية الثانية وفرضت احتياجاتها فتطورت الآلات الحاسبة وآلات معالجة البيانات فأدخلت الدوائر والصمامات الالكترونية لتزيد من سرعة حركة البيانات ، واستبدلت الحركة البطيئة للمفاتيح فى النظم الكهرومغناطيسية بالسرعة الهائلة

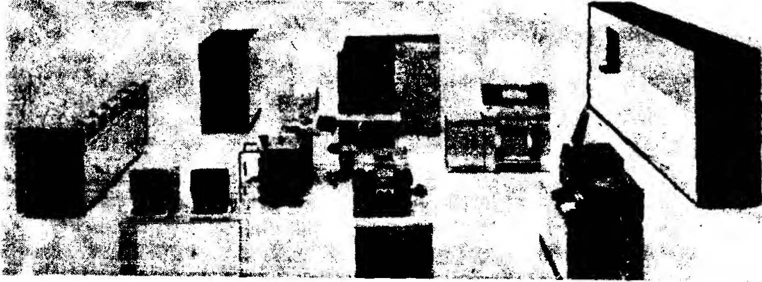
للالكترونيات . وظهرت فكرة ذاكرة الكمبيوتر ثم وضع أول كمبيوتر الكتروني يتميز بها في ١٩٤٦ . ثم تنوعت وتطورت وسائل ارسال البيانات واستقبال النتائج بطريقة وصولها نفسها . واتسع نطاق استخدام هذه الأجهزة حتى شملت جميع نواحي النشاط البشرى ، ومازالت فى تطور مستمر فى وحداتها ومع اختراع الميكروكمبيوتر التى يستبدل فيها الترانزستور ببلورات دقيقة ، ويمكن أن يزن الميكروكمبيوتر ١٧ رطل و يعمل كسائق أوتوماتيكى لسفينة فضاء ، وصاروخ ، وقمر صناعى . . .

وإذا كانت استخدامات الكمبيوتر شملت معظم نواحي حياتنا ، فهى أيضا لها استخدامات وتطبيقات فى الرياضيات كما ذكرنا . فعلى أبسط الأحوال يستطيع أن يقدم لجابات سريعة قد تكون الاجراءات المتطلبة لها بسيطة ولكنها تتطلب أزمانا طويلة إذا حاول معها الانسان . فمثلا يمكن للكومبيوتر أن يحسب بسرعة ط لأى درجة من الدقة نطلبها مثل :

ط = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥٠٢٨٨١٩٦١٦٩٣٩٩٣٧٥
٣٥٨٢٠٩٧٤٩٤٥٩٢٣٠٧٨١٦٤٠٦٢٨٦٢٠٨٩٩٨٦٢٨٠٣٤٨٢٥٣٤٢١١٧٠٦٧٩
٨٦٥١٣٢٨٢٣٠٦٦٤٧٠٩٣٨٤٤٦٠٩٥٥٠٥٨٢٢٣١٧٢٥٣٩٤٠٨١٢٨٤٨١١١٧
٤٥٠٢٨٤١٠٢٧٠١٩٣٨٥٢١١٠٥٥٥٩٤٤٦٢٢٩٤٨٩٥٤٩٣٠٣٨١٩٦٤٤٢٨٨١

الكمبيوتر (أو ما نعنى به نظام معالجة البيانات data processing system) هو ببساطة آلة تستطيع أن تقرأ البيانات وتكتبها ، وتقوم بعمليات حسابية وعمليات منطقية بسرعة فائقة ، كما أنها تختزن كمية هائلة من البيانات بحيث يمكن استرجاع هذه البيانات أو أجزاء منها عند الحاجة . و بلغة أخرى هو آلة الكترونية لها المقدرة على استقبال التعليمات والبيانات كداخل أو كتغذية input وتعالج البيانات أوتوماتيكيا ثم تنتج نتائج معالجة كخارج output . وتستخدم مخزن رئيسى (الذاكرة) لتتمسك ببرنامج التعليمات أثناء تنفيذه . أنظر شكل (١٦) .

ويضم الكمبيوتر أربع وحدات رئيسية هي: (١) وحدة التشغيل المركزية central unit processing (CPU) وهي مركز التحكم وتضم قسمين: قسم التحكم وقسم الحساب والمنطق؛ (٢) الذاكرة المغناطيسية core storage ويمكن اعتبارها أرشيف الكتروني توضع فيه المعلومات مبوبة، يمكن أن يرجع الكمبيوتر إلى أي منها بسرعة فائقة؛ (٣) وحدات التغذية input وتقوم بقراءة أو تمييز بيانات موضوعة بشفرة خاصة على وسيط ادخال (مثل البطاقة المثقبة) ثم تنقل هذه البيانات إلى داخل الكمبيوتر؛ (٤) وحدات النتائج وهي تتلقى البيانات من الكمبيوتر وتسجلها على البطاقات أو الأشرطة الورقية أو المغناطيسية كما يمكنها أن تطبع هذه المعلومات بالحروف الأبجدية والأرقام أو تنتج اشارات أو صور أو أصوات.



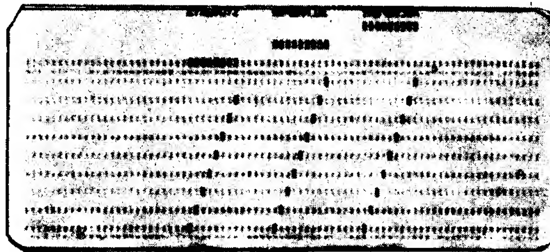
شكل (١٦)

ومن خلال توضيح التناظر بين تفكير العقل البشرى والكمبيوتر نقدم فكرة عن بعض مكونات الوحدات الأربعة وعملها فيما يلي:

١ ـ **الداخل (التغذية) Input**: إذا أراد الانسان أن يحل مسألة حسابية فانه يتلقى بيانات تشمل الأعداد والعملية أو التعليمات الخاصة بذلك، وهو يتلقى هذه البيانات بشكل شفوى أو بطريقة مكتوبة فيستعمل عينيه أو أذنيه كوحدات للادخال لتنقل المفاهيم إلى ذهنه. وبالمثل يجب أن يعطى الكمبيوتر المشكلة والمعلومات التى يحتاجها للحل. تغذية مثل هذه البيانات هو ما نسميه بالداخل، ويكون مسجل على بطاقات مثقبة أو شريط ورق أو شريط مغناطيسى أو أي وسائط أخرى.

البطاقات المثقبة هى أكثر الوسائل الشائعة فى تغذية المعلومات إلى الكمبيوتر. ويمكن للبطاقة الواحدة أن تحمل فى صورة شفرة ٨٠ قطعة من المعلومات. والبطاقة التى تستخدم الشفرة الثنائية binary code تسجل ١ عندما يحدث التيار ثقب، وصفر عندما لا يوجد ثقب.. أنظر شكل (١٧ ــ ب).

وتخزن البيانات على البطاقة عن طريق عمل ثقوب بها، ويمكن عمل الثقب عند تقاطع أى عمود مع أى صف. والبطاقة المستعملة فى معظم عمليات الكمبيوتر تحتوى على ٨٠ عمودا، ١٢ صفا. عند آخر البطاقة الصف رقم ٩ وفوقه الصف رقم ٨ وقريبا من أعلى الصف رقم صفر وفوقه صف غير مرقم هو الصف ١١ وفوقه صف غير مرقم هو الصف ١٢. هذان الصفان يعرفان بصفى الحروف. فاذا أردنا أن نسجل الرقم ٥ فى العمود ٧، فاننا نثقب ثقبا فى الصف ٥ من العمود ٧. وبالمثل يمكن تسجيل أى رقم باستخدام ثقب واحد. واضح أن الرقم ١ سيكون ثقبه فى الصف ١، الرقم ٢ فى الصف ٢، ... وهكذا. أما بالنسبة للحروف A, B, ... Z فان أى حرف يسجل فى عمود رأسى بثقبين فى هذا العمود. فمثلا الحرف A يمثل بثقب فى الصف ١٢ وصف ١ فى عمود ٨ وتختصر ذلك 12-1. الحرف L هو 11-3، Y هو 0-8.. أنظر شكل (١٤ ــ حـ).



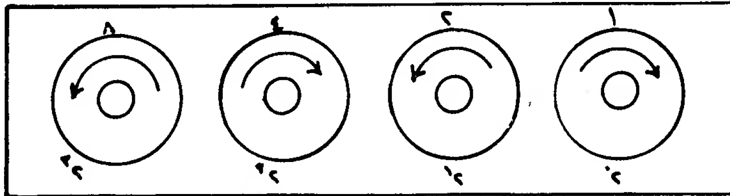
بطاقة مثقبة (أ)



ثقب ــ ١ بطاقة تستخدم شفرة ثنائية بدون ثقب ــ ٠

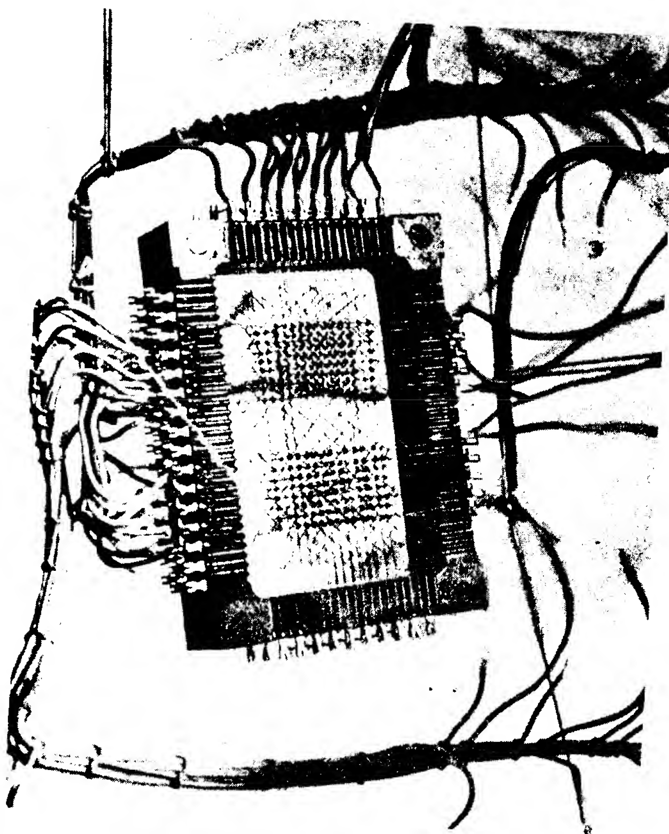
٢ ـــ **الذاكرة Memory** : كما فى حالة العقل البشرى. كل المعلومات التى يحتاجها الكمبيوتر لحل المشكلة وكيف يستخدمها تخزن فى وحدة ذاكرة الكمبيوتر. أحد أنواع الذاكرة مصنوع من عدة وحدات، منها ما هو فى شكل (١٨-ب) وفيه تكون الأسلاك شبكة grid من مغناطيسات حلقية core magnets دقيقة مربوطة عند كل تقاطع. البيانات بالشفرة ١ أو صفر تخزن بارسال تيار خلال مغناطيسات حلقية فى اتجاهات مختلفة (أنظر شكل «١٨ حـ»). فمثلا إذا استخدمنا أربع حلقات لتعبر الحلقة الأولى عن ١ والتى تليها عن ٢، ٢^٢، ٢^٣، وكانت الحلقة ممغنطة مع عقارب الساعة نقول أن الرقم موجود. وبهذه الطريقة يمكن أن نعبر عن الأعداد بجعل هذه الحلقات فى احدى حالتى الثنائية. فاذا كانت الحلقة الأولى والثالثة ممغنطتين مع عقارب الساعة والثانية والرابعة عكس عقارب الساعة فمعنى ذلك أن هذه المجموعة من الحلقات تعبر عن العدد ١+٤=٥. ويمكن باستعمال هذه المجموعة تمثيل أى عدد من صفر إلى ١٥ـ(١+٢+٤+٨). فالعدد صفر تمثله الحلقات كلها ممغنطة ضد عقارب الساعة، والعدد ١٥ تمثله الحلقات كلها ممغنطة مع عقارب الساعة، والعدد ٩ يمثل بالحلقة الأولى والرابعة ممغنطتين مع عقارب الساعة، وهكذا... (أنظر شكل ١٨ ـــ أ).

وعلى ذلك فوحدة التغذية مصممة لتتمكن من قراءة الرموز المسجلة على الوسائط، وتحويلها إلى تيارات كهربية تقوم بمغنطة حلقات داخل الذاكرة، بحيث يمكن لوحدة التشغيل المركزية أن تتفهمها.



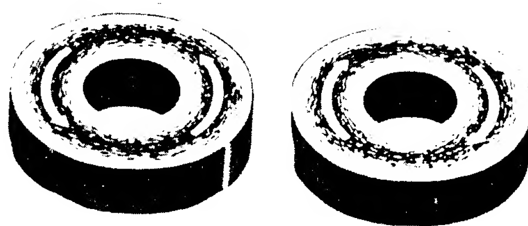
مجموعة حلقات ممغنطة تمثل العدد ٥

شكل (١٨ـأ)



وحـدة ذاكـرة

(ب)



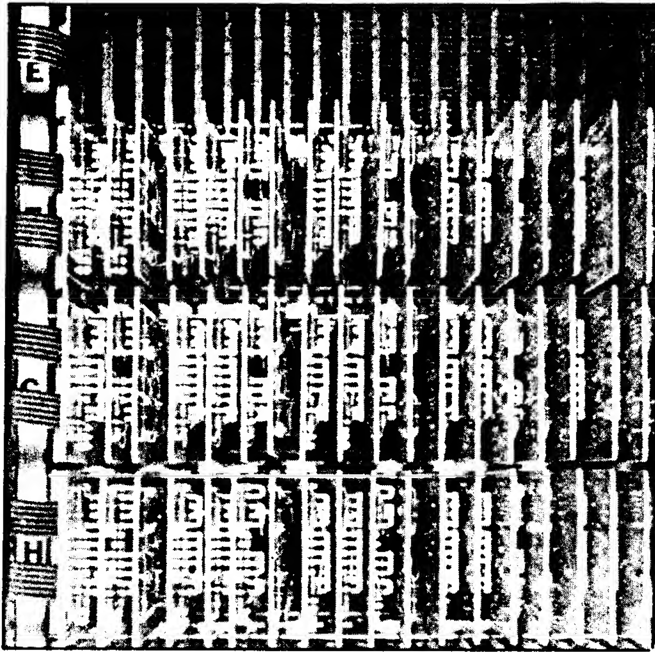
ممغنطة عكس عقرب الساعة

ممغنطة مع عقرب الساعة

(حـ)

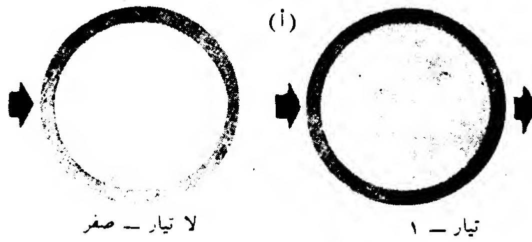
شكل (١٨)

٣ ـ **المعالجة Processing** : يحل الكمبيوتر المشكلة فى المعالجة باستخدام المنطق المقدم من كاتب البرنامج (بطريقة عمياء ـ ودون أية تصرف كما يعمل العقل البشرى). واستخدم الكمبيوتر فى البداية الصمامات المفرغة vacuum tubes فى وحدات المعالجة. أما الكمبيوتر الحديث فيستخدم دوائر ترانزستور أصغر وأسرع (كما فى شكل ١٩ أ). يتعامل الترانزيستور مع لغة النظام الثنائى. عندما لا يمر التيار يعنى صفر وعندما يمر يعنى ١.. أنظر شكل (١٩ ـ ب).



دوائر ترانزيستور على وحدات المعالجة

(أ)



لا تيار ـ صفر

تيار ـ ١

الترانزستور يتعامل مع النظام الثنائى بسرعة

(ب)

شكل (١٩)

وعموما الأجهزة التى تقوم فعلا بمعالجة البيانات أى بقراءة هذه البيانات ثم تنفيذ التعليمات بخصوصها ثم كتابة النتائج بالصورة التى نطلبها، تتكون أساسا من جزئين رئيسين: (١) وحدة التشغيل المركزية CPU ؛ (٢) وحدة الذاكرة المغناطيسية core storage . ووحدة التشغيل المركزية هى الجزء الايجابى الذى يتلقى التعليمات و يقوم بعمليات الحساب والمنطق، مثل مقارنة الأرقام ونقل البيانات من مكان لآخر لتبو يبها، أما الذاكرة المغناطيسية فهى الجزء السلبى الذى يتلقى المعلومات ويخزنها و يضعها تحت تصرف وحدة التشغيل المركزية، بحيث تأخذها هذه الوحدة وتعالجها، ثم تعيد النتائج إلى الذاكرة، لتكون جاهزة للخروج. ووحدة التشغيل المركزية تتكون (كما ذكرنا) من جزئين: (١) قسم التحكم Control section ؛ (٢) قسم الحساب والمنطق Arithmatic-logic section .

وتدخل البيانات والبرامج إلى الذاكرة المغناطيسية حيث يتم ترتيبها فى مجموعات متعاقبة من الكلمات، و يبدأ قسم التحكم فى قراءة هذه المجموعات، و يقوم بتفسيرها ثم يوجه جميع أجزاء الكمبيوتر للعمل طبقا لهذه التعليمات.

فاذا استدعى الأمر ضرب عددين فان قسم التحكم يوجه قسم الحساب إلى القيام بهذه العملية. وقد يحتوى البرنامج على التعليمات تقول: إذا كانت س أكبر من ص انتقل إلى الخطوة رقم ١٧ من البرنامج. وهنا يتدخل قسم الحساب والمنطق يقارن قيمة س بقيمة ص ثم يخطر قسم التحكم بالنتيجة. فاذا كانت س أكبر من ص يقوم قسم التحكم بالانتقال إلى الخطوة ١٧ ، وإلا فان قسم التحكم يحضر الخطوة التالية فى تسلسل البرنامج من الذاكرة المغناطيسية و يتولى مراقبة تنفيذها.

(٤) الخارج (النتائج) Output : بعد أن يقوم الذهن باجراء العمليات وحل المسألة يخرج النتيجة من الفم بالكلام أو بالكتابة عن

طريق اليد. الفم واليد يناظران وحدة اخراج النتائج فى الكمبيوتر. فيخرج النتائج فى صور مختلفة: بطاقات مثقبة، شرائط مثقبة، شرائط مغناطيسية، صفحات ورق مكتوبة بالآلة الكاتبة. ووحدة الطباعة هى وحدة من وحدات النتائج تقوم باخراج النتائج مطبوعة (كما فى شكل ٢٠). وتمتاز وحدات الطباعة هذه بسرعة فائقة، فبعضها يستطيع أن يكتب ٢٠٠٠ حرف فى الثانية، ٦٠٠ سطر فى الدقيقة أو أكثر من ١٠٠٠ سطر فى الدقيقة .. شكل (٢٠) يبين جزء من ورقة نتائج.

جزء من ورقة نتائج

شكل (٢٠)



وحدة طباعة عن بعد .. تليبرنتر

شكل (٢١)

٢.٣.٥ ــ برمجة الكمبيوتر بلغة البيسك:

برنامج الكمبيوتر هو قائمة بالتعليمات يتبعها الكمبيوتر لكى يعالج البيانات. الشفرة التى يكتب بها تسمى لغة البرمجة Programming language ، ويسمى كاتب البرنامج المبرمج Programmer . من لغة البرمجة البسيطة لغة البيسك BASIC ، والجوس GOSS أو انتركوم INTERCOM ، ومن اللغات الأصعب لغة الفورتران FORTRAN ، والكوبول COBOL التى يحتاج إليها فى البرامج المتوسعة للكمبيوتر الأكثر تعقيدا. وعموما أبسط هذه اللغات هى لغة البيسك ، ويمكن أن يتعلمها الفرد بسرعة بدون سابق معرفة بالكمبيوتر ، وقد كان القصد منها فى الأصل أن يستعملها غير المبرمجين. وقد تم وضع هذه اللغة سنة ١٩٦٣ بكلية دارتموث ويشتق اسم لغة البيسك BASIC من الاسم الكامل وهو Beginners All Purpose Symbolic Instruction Code ، بهدف تبسيط عملية تعلم كتابة البرامج للحاسبات الالكترونية حتى يستطيع الطلبة استخدام الطرف Time Sharing Terminal لحل المشكلات الرياضية على نظام الكترونى. أول خطوة فى برمجة مشكلة للكومبيوتر تتكون من كتابة خريطة انسياب تشبه ما قدمناه فى الفصل الأول الخطوة الثانية تتكون من تعلم الشفرة المستخدمة. نقدم فيما يلى لغة البيسك وتعلمها لكتابة برامج بسيطة بها.

١ ــ البرمجة فى البيسك:

نفترض فى العرض الذى نقدمه أن الا صال بالكمبيوتر يكون عن طريق طرف Terminal يسمى طباعة عن بعد أو تليبرنتر Teleprinter (شكل ٢١) وهو يشبه الآلة الكاتبة باللغة الانجليزية نوضحها فيما يلى:

(أ) الثوابت: كالأعداد. يمكن أن تستخدم الأعداد فى البيسك طالما تكون غير محتوية على أرقام أكثر مما يسمح للكمبيوتر أن يستقبلها ، وهى عادة على الأقل ست أرقام. لا تستخدم علامة (,) فمثلا 67,456 غير مسموح به ولكن المسموح به هو 67456 . العدد

76,000,000 الـذى يـسـاوى 7.6×10^{7} ، كـذلـك 0000000045 . وهو. 4.5×10^{9} يـكـتـب بـلـغـة الـبـيسك 4.5E9 . نلاحظ أن E تشير إلى أس ١٠ .

(ب) المتغيرات : تكتب المتغيرات .. x, y, z, a, بالحروف الكبيرة .. X, Y, Z, A, بـلـغـة الـبـيسك . ويمكن استخدام حرف للمتغير و يليه عدد مثل ... X1, Y6, ليعبر عن متغير.

(حـ) الـدوال : يحـتـوى البيسك على دوال للتعامل مع الحسابات الـتـى تـتـضمن الجذر، القيمة المتوسطة ، الدوال المثلثية ، اللوغاريتمات ، الـدوال الأسـيـة ، ... فـمـثـلا الجـذر الـتـربـيـعى هو دالة SQR ، فتكتب $\sqrt{X}$ بلغة البيسك SQR (X) . حيث توضع الأقواس حول العدد المراد ايجاد جذره التربيعى .

(د) الـتـعـبـيرات Expressions : الثوابت والمتغيرات والدوال يمكن أن تجـمـع لتكوّن تعبيرات . العمليات المستخدمة : + للجمع ، - للطرح ، * للـضـرب ، / للـقـسـمـة ، ↑ للأس . فـمـثـلا بعض التعبيرات فى الجبر وبلغة البيسك نقدمها فيما يلى .

الجـبـر	البيسك
a + b	A + B
2x + 3y	2* X + 3* Y
7 x 4	2* X ↑ 4
$\sqrt{k+1}$	SQR (K+1) or (K+1)↑ . 5 or (K+1) ↑(1/2)
$\frac{m+n}{x+2}$	(M+N) / (X+2)

(هـ) دع LET : تُـعـطـى قيم للمتغيرات باستخدام تقارير LET . فـمثلا التقرير LETK=3 تُعطى قيم ٣ للحرف K . وإذا وضع التقرير

LETJ=K+4 بعد اعطاء قيمة للحرف K فان J تعطى ٧. ويمكن استخدام التقرير LETI=I+1 وهو يعنى زود قيمة I واحد.. فمثلا:

```
LET    A = 6
LET    B = A+3
LET    C = 2* A/6
LET    A = A+2
LET    B = C↑2
```

ففى النهاية A هى ٨ [=٦+٢]، B فى البداية ٩ [=٦+٣]، C هى ٢ [=٢×$\frac{٦}{٦}$]، B فى النهاية ٤ [=$٢^{٢}$].

(و) إطبع PRINT: يستخدم تقرير إطبع ليطبع الكمبيوتر النتائج أو أى خارج. فمثلا التقرير PRINT A; B سيطبع قيمة أ ثم قيمة ب عندما تنفذ. وهذه القيم هى القيم العددية لكل متغير. فمثلا بالنسبة للبرنامج الصغير

```
LET    X = 6
LET    Y = 4
LET    S = X+Y
PRINT     X; Y; S
```

فإن البرنامج سوف يجعل المعلومات الآتيه تطبع عندما تنفذ

```
6      4      10
```

وإذا كنا نفضل أن يكون الخارج على صورة X=6 Y=4 S=10 نستخدم التقرير: PRINT «X=»; X, «Y=» ; Y, «S =»; S

فى برنامج البيسك يجب أن يكون لكل سطر رقم فمثلا:

بأخذ البرنامج الآتى الذى يعطى قيم إلى A, B, C ويحسب مجموعهم و يطبع النتيجة:

```
10   LET     A =50
20   LET     B =76
30   LET     C =38
40   LET     S3=A+B+C
50   PRINT   S3
66   END
```

عندما ينفذ البرنامج يطبع المجموع 164 ، نلاحظ أنه فى مقدمة كل سطر للبرنامج أعداد ... ,10, 20 فبرنامج البيسك يكون كل سطر فيه مرقم ، والتقارير تنفذ بترتيب الصيغ بالأعداد التصاعدية . يمكن استخدام الأعداد المتتابعة ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ولكن يفضل استخدام ١٠ ، ٢٠ ، ... حتى يمكن أن تدخل أسطر اضافية للبرنامج . فمثلا يمكن أن ندخل أسطر بأرقام ٥ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ...

(ز) أدخل INPUT : إذا اقتصرنا على استعمال تقارير LET لاعطاء قيم للمتغيرات فاننا يجب أن نغير البرنامج عند تغيير قيم البيانات المستخدمة كل مرة . ولذلك فاننا بدلاً من ذلك نستخدم تقارير أدخل مثل : INPUT A, B, C عندما يُجرى الكمبيوتر هذا التقرير فانه سيطبع علامة استفهام (؟) . ولذا يجب أن نستجيب ونعطى الكمبيوتر قيمة A ثم قيمة B ثم قيمة C مطبوعة على نفس السطر وتنفصل بفصله . فمثلا إذا أردنا أن ندخل قيمة ٧ للمتغير A ، ٢٣ للمتغير B ، ١٤ للمتغير C فاننا نطبع (نكتبه بالآلة الكاتبة) الداخل 14 ,23 ,7 . نلاحظ أننا لا نضع فصلة (,) بعد العدد الأخير. هذه الصورة من البيانات الداخلة تتطلب أن تكون عند طرف الكمبيوتر.. ولذا تفضل تقارير اقرأ وبيانات READ and DATA — التى سوف نذكرها — خاصة للمستخدمين الذين لا يتوفر وجودهم عند الطرف terminal أثناء تنفيذ البرنامج .

فلو افترضنا أننا قررنا أن نغير البرنامج السابق ليشمل داخل

للمتغيرات A, B, C غير القيم 38 ,70 ,50 المعطاه.. فاننا نستبدل الأسطر 30 ,20 ,10 بتقرير على الصورة : INPUT A, B, C . تقرير الداخل هذا يمكن أن يرقم بأى عدد من ١ إلى ٣٩، وليكن رقم ١٥ وعلى ذلك يكون البرنامج المعدل :

```
10    INPUT    A, B, C
40    LET    S3=A+B+C
50    PRINT    S3
60    END
```

لينفذ الكمبيوتر هذا البرنامج نطبع (نكتب بالآلة الكاتبة) كلمة RUN ونضغط مفتاح الرجوع RETURN KEY . الكمبيوتر سيسأل عن بيانات ويطبع علامة استفهام.. ومن ثم يجب أن تستجيب بطبع عدد للمتغير A ، ثم B ، ثم C . منفصلة بفصلات عن بعض ثم تضغط مفتاح الرجور. فيأخذ الكمبيوتر قيم المتغيرات ويحسب المجموع قيمته. والبرنامج وسيره run يكون :

```
10    INPUT    A, B, C
40    LET    S3=A+B+C
50    PRINT    S3
60    END
RUN
؟    1, 2, 3
6
```

(ح) إذهب إلى GO TO : تستعمل تقارير إذهب إلى للنقل إلى تقرير آخر ليس بالضرورة فى التتابع الموجود فى البرنامج. فمثلا إذا وضع تقرير إذهب إلى GO TO بعد تقرير اطبع PRINT فى البرنامج السابق فاننا نرجع ثانية لنقرأ فئة قيم أخرى للمتغيرات A, B, C ونحسب المجموع ونطبعه.. البرنامج هنا :

```
10   INPUT   A, B, C
40   LET   S3 = A + B + C
50   PRINT   S3
55   GO TO   10
66   END
```

كل مرة تطبع قيمة للمجموع ، يسأل الكمبيوتر عن داخل سير run هذا البرنامج يظهر مثل :

```
R U N
?   1, 2, 3
6
?   10, 20, 30
80
?   15, 25, 20
60
:
```

(ى) إذا IF : تقارير «إذا» تعطى القدرة على نقل التتابع إذا تحقق شرط . فمثلا التقرير IF S > 0 THEN 180 تعنى انه إذا كانت S أكبر من صفر فانقل إلى سطر ١٨٠ (سواء إلى الأمام أو إلى الخلف) لينفذ التقرير هناك ، إذا لم تكن S أكبر من الصفر فنفذ التقرير التالى. ومن الرموز التى تستخدم مع تقارير «إذا» <، >، <= وتعنى أقل من أو تساوى ، <> وتعنى لا تساوى . . .

(ك) الدورانات (الخيات) Loops :

إذا أردنا أن نكتب لجمع الأعداد من ١ إلى ١٢ فان تقرير مثل

LET S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12

يبدو أنه يكفى . ولكن إذا أردنا أن نوجد مجموع الأعداد من ١

إلى ١٠٠ فبدلا من كتابة مائة عدد نستخدم دوران Loop or cycle . فنبدأ بالمجموع S عند ١ ثم نجمع ١ كل مرة أى نبدأ بالمجموع عند ١ ثم نضيف ٢ إلى المجموع، ثم نضيف ٣ إلى المجموع .. يتكون المجموع فى خطوات باضافة قيمة ما يعد Counter وليكن K إلى المجموع S ليكون المجموع الجديد. ولكن فقط عندما تكتمل العملية process فان S يمثل المجموع الكلى من ١ إلى ١٠٠ مثلا. تقرير البيسك الذى يتيح ذلك هو LET S=S+K . و يكون البرنامج :

```
10    LET    S = 1
20    LET    K = 2
30    LET    S = S+K
40    LET    K = K+1
50    IF K — 100 THEN 30
60    PRINT    S
70    END
```

و يكون سير البرنامج

```
RUN
5050
```

والنتيجة مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ هو ٥٠٥٠

ويمكن تعديل البرنامج ليتقبل أن قيمة N للأعداد من ١ إلى N لنحصل على مجموعها، وادخال قيم مختلفة N، ونحصل لحظيا على المجموع مطبوعا من البرنامج المعدل :

```
5    INPUT N
10   LET S=1
20   LET K=2
30   LET S=S+K
40   LET K=K+1
50   IF K    =N THEN 30
```

```
66    PRINT  S
65    60 TO 5
70    END
```

وهنـا يـكـون سير الـكـمبيوتر باستخدام قيم N مثل ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ...

```
R U N
?    100
5050
?    200
20100
?    400
80300
:
```

(ل) تـقـاريـر لـFOR ، والـتـي بـعـد NEXT : تستعمل فى عمل الدوران .

فـمثلا برنامج لحساب مجموع الأعداد الصحيحة من ١ إلى١٠٠يمكن أن يكتب (بالشفرة)

```
10    LET  S=1
20    FOR  K=2  TO  100
30    LET  S=S+K
40    NEXT  K
50    PRINT  S
60    END
```

كـل التقارير بين FOR و NEXT (فى هذه الحالة التقرير 30) تنفذ أولا عـندما k=2 ثم عندما K=3 ، ... وأخيرا عندما K=100 عندما يـسـتـخـدم الـتـقرير FOR فالذى يعد K للدورة يتغير بمقدار ١ كل مرة

تنفذ تقارير الدورة. إلا إذا حددنا غير ذلك. فمثلا مجموع الأعداد الفردية من ١ إلى ٩٩ تحسب بتنفيذ تقارير الدورة الآتية:

```
10   LET S=1
20   FOR K=3 TO 99 STEP 2
30   LET S=S+K
40   NEXT K
```

نلاحظ أن STEP 2 تحدد أن الذى يعد COUNTER سوف يزيد ٢ كل مرة بحيث لا يزيد عن ٩٩، يمكن استخدام أى حرف بدل k مثل ... ,I,J,N.

م ــ الدلائل السفلية Subscripts والبعد DIM: يلزمنا فى بناء الدورة متغيرات بدلائل. فكما فى الجبر نستخدم $س_1$ ، $س_2$ ، ... $س_{٥٠}$ كمصفوفة لخمسين س، فانه فى لغة البيسك $س_1$ تكون X(I)، $س_2$ تكون X(2)، ... $س_ن$ تكون X(N) حيث يمكن استبدال X بأى حرف من A إلى Z.

تقارير DIM يمكن وضعها فى أى مكان بالبرنامج عندما يزيد بُعد (أو حيز) المصفوفة عن ١٠ (لأن أقل من ذلك يدرج ببعد أوتوماتيكيا بالكمبيوتر).

لتوضيح استخدام المتغيرات ذات الدلائل فى البرنامج، نقدم برنامج يحسب المتوسط للأعداد $أ_1$، $أ_2$، ... $أ_{٢٥}$.

```
10   DIM A (25)
20   FOR I — 1 TO 25        } هذه الدورة خاصة بوضع
30   INPUT A (I)            } a i s واحدة كل مرة
40   NEXT I
50   LET S=A (I)
60 FOR J = 2 TO 25          } هذه الدورة خاصة بجمع
70   LET S=S+A (J)          } كل الـ٢٥ من a i s
80   NEXT J
```

```
90    LET M=S /25          } اقسم المجموع على ٢٥
100   PRINT   M            } لايجاد المتوسط
100   E N D
```

(يمكن تجميع الدورتين فى دوره).

(ن) تقارير اقرأ وبيانات READ and DATA: نلاحظ أن الكمبيوتر فى البرنامج السابق يسأل ٢٥ مرة عن الأعداد كلما مر بالدورة. وهذا يعنى أنك تُسأل أن تكتب عدد ثم آخر عند الطرف terminal. من الأفضل كتابة الـ ٢٥ عدد مرة واحدة. ولكى نفعل ذلك نُستخدم تقارير DATA ونكتب كل عدد بعد الآخر بفصله. وهنا نكتب READ A (I) بدلا من INPUT A (I)، ونكتب DATA فى أى مكان قبل END فى البرنامج وليكن فى الأول أو قبل النهاية.

وفيما يلى البرنامج السابق مكتوبا بتقارير اقرأ والبيانات ــ البيانات هنا اختيارية:

```
10    DIM A (25)
20    FOR I=1 TO 25
30    READ A (I)
40    NEXT  I
50    LET S=A (I)
60    FOR J=2 TO 25
70    LET S=S+A (J)
80    NEXT  J
90    LET M=S /25
100   PRINT M
105   DATA 8,12,19,6,4,7,13,12,10,9,4,11
108   DATA 9,8,16,15,17,12,7,4,11,10,6,14,3
110   END
```

نلاحظ أنه إذا كانت البيانات كثيرة على التقرير DATA واحد نكتب تقارير اضافية كما فى السطرين 105 ، 108 السابقين.

ولكى ندرب التلميذ على عمل برامج بلغة البيسك، نتيح له فرصة عمل برامج بسيطة ومتدرجة وعمل أكثر من برنامج لحل مشكلة. وفيما يلى بعضا من هذه الأمثلة البسيطة.

مثال: أكتب برنامج يأخذ قيم أربع أعداد ويحسب مجموعهم والمتوسط الحسابى لهم.

```
10    INPUT A, B, C,D
20    LET S = A+B+C+D
30    LET M = S /4
40    PRINT S; M
```

مثال: أكتب برنامج يقبل قيمة قياس بالسنتيمتر (وسميها C) وحولها إلى بوصات (I) واطبع القياس بالبوصة (لاحظ أن البوصة ٢,٥٤ سم). ثم عدل البرنامج لتغيير قيمة C أخرى إلى بوصة:

أولا:

```
10    INPUT C
20    LET I = C /2.54
30    PRINT I
40    END
```

ثانيا: نضع

```
35    GO TO 10
```

مثال: أكتب برنامج يقبل نقطتين على مستقيم، ويحسب ويطبع ميل المستقيم. خذ احداثيات النقطة الأولى (X1 و Y1) والنقطة الثانية (X2 و Y2).

```
10    INPUT X1, Y1, X2, Y2
20    LET M = (Y2 — Y1) /(X2 — X1)
30    PRINT «THE SLOPE IS»; M
40    GO TO 10
50    END
```

مثال: القانون $ن^2 - ن + 41$ يقدم الأعداد الأولية لأى عدد صحيح ن بين ١، ٤١. أكتب برنامج يقدم هذه الأعداد الأولية (الأربعين) ويطبعها.

```
10   FOR N = 1 TO 40
20   LET P=N↑2—N+41
30   PRINT  P
40   NEXT  N
50   END
```

مثال: أكتب برنامج للربح المركب يقبل قيمة المبلغ (P)، الربح فى السنة I وعدد السنوات N ويحسب الجملة ويطبع الجملة.

```
10   INPUT P, I, N
20   LET A = P*  (1+I/100)↑N
30   PRINT  A
40   GO TO  10
50   END
```

مثال: أكتب برنامج يقبل أول عددين فى متوالية عددية ثم أجعله يقدم الثمانية حدود التالية. سمى هذه الحدود A(3) إلى A(10) واطبع كخارج الحدود العشرة لكل متوالية. استخدم البيانات:

(أ) ١، ٢، ...   (ب) ١، ٣، ...   (حـ) ٦٢٣، ...
(ى) ٥، ١٠، ...   (هـ) ٣٦، ٤٠، ...

```
10   INPUT+A (1), A (2)
10   LET D = A (2) — A (1)
30   FOR I = 3 TO 10
40   LET A (1) = A (1) + (I — 1)*  D
50   NEXT  I
60   FOR I = 1 TO 10
```

```
70   PRINT  A (I)
80   NEXT  I
90   END
```

مثال: أكتب برنامج لحل المعادلتين الآتيتين س + ٢ ص = -٧ ، ٤ س + ٢ ص = ٥ نلاحظ أنه إذا كان أ س + ب ص = حـ ، د س + هـ ص = و ، أ هـ − ب د ≠ . فان س = (حـ هـ − ب و) / (أ هـ − ب د) ، ص = (أ و − حـ د) / (أ هـ − ب د) هما حل المعادلتين ، أما إذا كان أ هـ − ب د = صفر فانه لا يوجد حل وحيد.

البرنامج يمكن أن يكون:

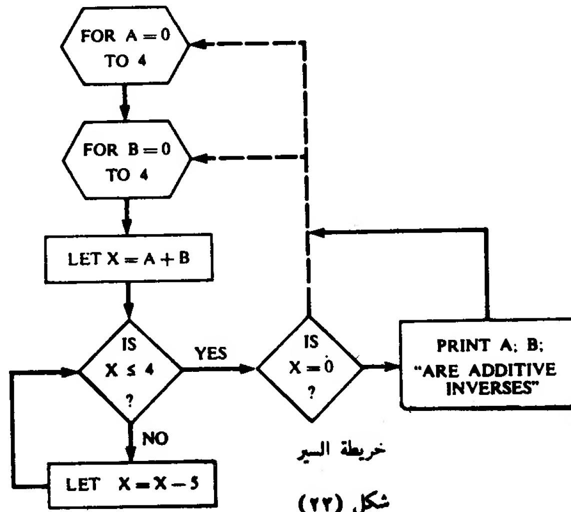
```
10   READ  A, B, C, D
15   LET  G = Å E — B̊ D
20   IF  G = O THEN 65
30   READ  C, F
37   LET X = (C̊ E — B̊ F) / G
42   LET Y = (Å F — C̊ D) / G
55   PRINT X, Y
60   GO TO 30
65   PRINT «NO UNIQUE SOLUTION»
70   DATA 1, 2, 4, 2
80   DATA -7, 5
85   DATA 1, 3, 4, -7
90   END
```

نلاحظ فى هذا البرنامج التقرير 70 يعطى A واحد ، B اثنين ، C أربعة ، D اثنين . أما التقرير 75 فيعطى E العدد -٧ ، و يعطى F خمسة . التقرير 85 تعطى حل للمعادلتين س + ٢ ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ٣ وللمعادلتين س + ٢ ص = ٤ ، ٤ س + ٢ ص = -٧ .

مثال : أكتب برنامج يطبع أزواج عناصر المعكوس الجمعى لحساب الأعداد الصحيحة مقياس ٥ ، وارسم خريطة الانسياب (السير) لهذا البرنامج .

البرنامج :

```
10    FOR A = 0 TO 4
20    FOR B = 0 TO 4
30    LET X = A + B
40    IF X = 4 THEN 70
50    LET X = X — 5
60    GO TO 40
70    IF X = 0 THEN 110
80    NEXT B
90    NEXT A
100   GO TO 130
100   PRINT A; B; « ARE ADDITIVE INVERSES »
120   GO TO 80
130   END
```



خريطة السير

شكل (٢٢)

٤.٥ــ توصيات حول تدريس تطبيقات الرياضيات :

أولا : توصيات عامة

١ ــ يجب أن ينمى المدرس الأفكار والمهارات الرياضية بطريقة تجعلها تستخدم (وتطبق) فى الدراسة فيما بعد، وفى مشكلات الحياة اليومية، وللرضاء الشخصى. فالرياضيات التى تدرس يجب أن تشمل أجزاءا تعطى بصيرة بالتطبيقات فى المجالات المختلفة. وأن يركز المدرس فى تدريسه على نقل أثر التعلم باستخدام المحتوى المناسب.

٢ ــ يستحسن أن يستخدم المدرس التطبيقات فى خلق الدافع للتعلم. فكثير من التلاميذ يتساءلوا عن أهمية المفاهيم والمهارات الرياضية، فاذا علموا أنها تستخدم فى وظائف ومهن معينة أو فى مجالات أخرى فان ذلك يمكن أن يقوى الدافع لتعلم الرياضيات.

٣ ــ يستخدم المدرس التطبيقات لتوضيح دور الرياضيات فى النمو الحضارى.

٤ ــ يستخدم المدرس التطبيقات كوسيلة لحل المشكلات.

٥ ــ أن يكون تدريس التطبيقات على أساس الفهم، أى على أساس فهم ومتى وكيف. ولماذا تطبق الرياضيات. فهدف فهم الرياضيات يجب أن يكون موجود فى فهم أساسيات المادة وأيضا فى فهم تطبيقاتها.

٦ ــ تستخدم التطبيقات لتحقيق أهداف وجدانية بجانب الأهداف المعرفية. خاصة تربية تذوق الجمال الرياضى وتقدير وحب الرياضيات لجمالها ولنفعها.

ثانيا : توصيات خاصة

١ ــ يكون المدخل فى تدريس التطبيقات أمثلة واقعية (حقيقية) فى عالمنا الطبيعى وفى المجالات العلمية والبيئية لها، كالأمثلة التى قدمناها فى بند ٢٠٥ السابق. فمنذ القدم وتأمل الانسان فى الطبيعة

لكشف أسرارها وقوانينها، او لتذوق تناسقها وابداعها وجمالها، أو لحاجته للتعامل مع البيئة وتطويعها لخدمته، ...... دفعته إلى معرفة الرياضيات وتنميتها وتطويرها لذاتها ولنفعها ولجمالها. وعلى ذلك فالتلميذ يحتاج أن تتاح له فرصة التأمل فى الطبيعة (وعلومها)، وملاحظة الأنماط الرياضية البسيطة فى مكوناتها القريبة منه، وفرصة ليتمتع بجمال الرياضيات من خلال جمال الطبيعة وبالعكس يتمتع بجمال الطبيعة من خلال الأنماط الرياضية والتنظيمات العددية والهندسية والقوانين الرياضية التى تحكمها.

٢ — يشير المدرس إلى التطبيقات فى المجالات العلمية المختلفة التى يدرسها التلميذ أو فى المجالات العملية (الفنية أو الصناعية ...) التى قد يتعامل معها. وهنا يجب أن يكون للمدرس خلفية واسعة فى مجالات غير الرياضيات.

فمثلا عند تدريس بعض القواعد الجبرية، نأخذ أمثلة لقواعد مناظرة فى العلوم والميكانيكا... كما يتضح من الأمثلة الآتية:

عند تدريس:

(أ) ص = م س (معادلة خطية — لتناسب مباشر)

تعطى الأمثلة

ق = ك حـ (العلاقة بين القوة والعجلة)

ف = ع ن (العلاقة بين المسافة والسرعة المنتظمة)

(ب) ص = ك / س (تناسب عكسى)

ص = ك / ح (العلاقة بين الضغط والحجم)

نسبة الذكاء = (العمر العقلى / العمر الزمنى) × ١٠٠

(حـ) ع = ك س ص (ع دالة فى س، ص)

حجم الاسطوانة ح = ط نق^{٢}ع (ح دالة فى نق ، ع)

حـ = ط ر ق — ق قطر الحفار drill ، حـ السرعة ، ر عدد الدورات فى الدقيقة .

ق = ت حـ — ق القوة الكهربية ، ت شدة التيار ، حـ فرق الجهد .

ق = ض م — ق القوة ، ض الضغط ، م المساحة من التصادم outomobile collision .

(ى) $ص = \frac{ك}{س^{٢}}$ (ص تتناسب عكسيا مع س^{٢})

$ش = \frac{ك}{ف^{٢}}$ شدة الضوء وعلاقته بالمسافة من المنبع

$ص = \frac{ك}{ف^{٢}}$ شدة الصوت وعلاقته بالمسافة من المنبع

(هـ) ص = ك س^{٢} (معادلة من الدرجة الثانية)

ف = حـ ن^{٢} — المسافة التى يقطعها جسم بعجلة ثابتة حـ فى زمن ن .

$ق = \frac{و \times ع^{٢}}{د\ نق}$ — ق القوة الطاردة المركزية لجسم يدور وعلاقته بوزن الجسم و ، وسرعة ع ، د عجلة الجاذبية ، نق نصف قطر اللفة turning .

ق = م ت^{٢} — القوة الكهربية وعلاقتها بمقاومة ثابتة والتيار

ض = ض م ع^{٢} — الرفع lift ض على جناح طائرة سرعتها ع ميل / ساعة ، ض معامل الرفع ، م مساحة الجناح قدم^{٢}.

(و) ص = أ^{س} (دالة أسية)

ص = هـ$^{-٠,٢٥ ت}$ — كمية الرديوم الخامدة disintegration وعلاقتها بالزمن بالقرون .

أمثلة أوردناها فى بند ١.٢.٥ .

٢ ــ اعطاء تمارين واقعية من هذه المجالات السابقة.

٣ ــ اعطاء دروس معملية فى الرياضيات والعلوم. و يقوم التلميذ هنا من خلال التجارب المادية بجمع البيانات للوصول إلى تعميم أو لتوضيح المفاهيم. وهذه الدروس بجانب أهميتها فى توضيح التطبيقات لها قيمتها فى الاكتشاف وحل المشكلات. ويمكن أن يقوم التلميذ بعديد من الأنشطة مثل عمل كثير السطوح، قياس الظلال، أخذ أنواع من البيانات الفلكية، تتبع نمو نبات، استخدام أدوات مثل: بندول ــ عدسات ــ زنبرك ــ مستويات مائلة ــ ميزان ــ موازين، ليربط بين الرياضيات والحياة الواقعية.

فمثلا يمكن استخدام أجهزة خاصة من معمل العلوم فى دروس معملية فى الهندسة والجبر كما يأتى:

(أ) بالنسبة للهندسة:

نمى بلورات لتوضيح كثير السطوح المنتظم. أفحص مواد مثل الملح تحت الميكروسكوب لترى كثير السطوح وكثير الأضلاع.

- استخدم الانعكاس على منضدة بلياردو.
- بين أن خلية النحل السداسية محيطها طوله بالقياس له نهاية عظمى وله نهاية صغرى.

(ب) بالنسبة للجبر:

- عين نسب الترددات لآلة وترية.
- بين علاقة شدة الضوء بالمسافة من المنبع باستخدام الفوتومتر.
- وضح منحنى القطع المكافىء (ص = س٢) عن طريق مسار ماء مدفوع لأعلى.
- ارسم الشكل البيانى لفقد الحرارة من وعاء ماء مغلى كدالة للزمن.

٤ ــ تدريس وحدات اضافية تشمل موضوعات مثل:

الاحتمالات والتأمين ــ المساقط والرواسم ــ المسطرة الحاسبة ــ المساحة surveying ــ المناظير والرسم ــ البرمجة الخطية والاقتصاد ــ

النسبة والموسيقى ــ النجارة ونظرية فيثاغورث ــ الملاحة فى البحر وفى الجو ــ عمل القرار والاحتمالات . بالاضافة إلى موضوعات فى بعض العلوم كما قدمنا فى بند ٢٠٥ .

٥ ــ تصميم منهج الرياضيات من خبرات فى العالم المادى . فمثلا يبنى الجبر من قواعد وقوانين فى مجالات مختلفة تتعلق بالحركة والجاذبية والضوء والحرارة والقوة والاحتكاك والمرونة والبدول ونمو السكان .

فمثلا ع=٣٢ن تؤدى إلى المعادلة ص=أس ثم تقدم المعادلة ص=م س+حـ عن طريق قواعد مثل : ك=٣٠ن+٥٠٠ حيث ك تعداد مدينة عدد سكانها ٥٠٠ وتزداد بمعدل ٣٠ فرد فى السنة ،

ع=٣٢ن+١٠٠ .

، ل=١/٤و+٤ حيث ل طول زنبرك ، طوله فى البداية ٤ بوصة ويتمدد ١/٤ بوصة لكل رطل من الوزن والمتصل به .

٦ ــ تقديم بعض البرامج العملية مثل :

حساب المحل (رياضة الكانتين ــ البيع والشراء فى محل) ، رياضيات المستهلك ، الرياضيات الأساسية للعلوم والادارة ولحساب الأعمال ، برامج الكمبيوتر (كما قدمنا فى بند ٣٠٥) .

٧ ــ زيارة بعض الجهات للتعرف على الرياضيات المستخدمة فى الوظائف المختلفة . كالزيارة لمصنع أو بنك أو الأقسام الخاصة بوزن الأمتعة فى مطار أو ميناء ...

****

الباب السادس

التقويم

يتعين نجاح أى برنامج تعليمى عن طريق مدى موافقة نتائجه بالأهداف التى يعمل على تحقيقها ولذا فان التقويم يعد جزءاً متكاملا مع البرنامج التعليمى.

ولا يكون التقويم قاصرا على محاولة إختبار البرنامج وهو مكتمل ولكن فى الكشف المستمر لتقدم التلميذ نحو الأهداف الموضوعة.

ومن أهم أهداف التقويم إيجاد طرق لتحسين البرنامج التعليمى، فمن التقويم يمكن أن يُتبين قوة أو ضعف البرنامج: المادة ــ المحتوى ــ طرق التدريس.

ولم يعد ينظر إلى التقويم على أنه مجرد طريقة لإعطاء درجات وقياس التحصيل ولكنه توسع ليشمل قياس نمو الميول والتذوق. كما أن أساليب التقويم أصبحت لا تتضمن فقط إعطاء إختبارات تحصيلية سواء مقننة أو من وضع المدرس ولكن أيضا المقابلات، الملاحظات، التقارير والمشروعات، التشخيص، التنبؤ والكشف عن الاستعداد، ... وغيرها مما يتعلق بنمو التلميذ.

وعلى ذلك فالتقويم له دلالة هامة فى العملية التعليمية، ويجب الا نعتبرة مجرد عملية منفصلة تستخدم على فترات مناسبة بهدف إعطاء درجات ولكن يجب أن ننظر إليه كعملية مستمرة له علاقة قوية بكل ناحية من نواحى البرنامج الكلى لنمو التلميذ وتحسنه. وعامة من مسئوليات التقويم:

١ ــ أن يقوم أساسا لتوجيه التدريس والتعليم من خلال اكتشاف الاستعداد والقدرات وتشخيص الأخطاء.

٢ــ ان يقوم الطرق المستخدمة فى التدريس وتحسينها .
٣ــ أن يقيس تحقيق الأهداف و يقدم تقريراً لتحسن التلميذ .
٤ــ أن يقدم توجيهات لتحسين البرنامج التعليمى .
٥ــ أن يقيس استعداد التلميذ لتقبل مواضيع جديدة .
٦ــ أن يقدم معلومات لأولياء الأمور ويحثهم على مساعدتهم وتعاونهم .

والتقويم فى الرياضيات له دلالة هامة فى مناهج الرياضيات . ويجب أن يبنى برنامج التقويم على أساس الأهداف المرجوة من تدريس الرياضيات حتى يجيب على أسئلة مثل :

هل يعرف التلميذ أساس ما يتعلمه أى « كيف ولماذا » هل يكون التلميذ معلومات متكاملة وليس مجرد حقائق ومعلومات مثناثرة ؟ هل يقدم للتلميذ وسائل للتفكير الناقد والخلاق ؟ هل ينمى قدراتهم فى التميز بين المعلومات الأساسية غير الأساسية ؟ هل يساعدهم على البرهان المنطقى ؟ هل يساعدهم على التعميم ؟ هل يساعدهم فى حل المشكلات ؟ هل يساعدهم فى نقل معلوماتهم ؟ وهل يساعدهم فى تقييم مناقشتهم أفكارهم ، نتائجهم ؟ ..

ويمكن للقارىء الذى يريد الاستزادة فى معلوماته الخاصة بالتقويم أنه يرجع الى أحد كتب المناهج التى تعالج التقويم بشىء من التفصيل وسنكتفى فيما يلى بتقديم أنواع التقويم وأنواع الاختبارات ، ونماذج من أسئلة اختبارات موضوعية على مستوى المرحلة الاعدادية فى الرياضيات .

١٠٦ــ التقويم وأنواعة :

يوجد أنشطه عديده مختلفة يمكن أن يطلق عليها تقويم **evaluation** وقد يتجه التقويم الى المادة وتنظيمها وتطويعها للفصل الدراسى ليستخدمها التلميذ فى تعلم الرياضيات ، وهنا يكون رأى الرياضيين (والرياضيين التربويين) حول نوعية الرياضيات المعروضة وتنظيم المادة

أول خطوة من خطوات التقويم. وقد يركز التقويم حول نتاج التلميذ، وهو التغيير المعرفى (والوجدانى) الناتج من عرض برنامج معين على التلميذ. وهنا يكون التقويم قائماً على معايير تتضمن على وجه المثال: مقاييس للتحصيل، مقاييس للتذكر بعد فترة، مقاييس اتجاهات، مقاييس لمفهوم الذات. حيث تكون هذه المعايير مقاييس لأنواع مختلفة عديدة من التحصيل تتفق مع أهداف برنامج الرياضيات. وهنا يعتبر: «التقويم عملية لتحديد الى أى مدى تتفق النواتج مع الأهداف».

وتقويم برنامج الرياضيات أثناء عملية بنائه يسمى تقويم بنائى formative evaluation ويهدف التقويم البنائى الى جمع معلومات قد تكون ذات طبيعة تشخيصية يمكن استخدامها لتحسين النواتج. فهذا النوع من التقويم يعتبر جزءاً رئيسياً من التدريس، ويستخدم وسائل عديدة لجمع عينات من سلوك التلميذ فى الرياضيات ليسهل التدريس ويجعله اكثر فاعلية من يوم ليوم آخر. ويتطلب التقويم البنائى تحليلاً جزئيا مفصلاً للمحتوى. وتستخدم المعلومات التى يحصل عليها من هذا التقويم كغذاء رجعى فى التعليم لتحديد الأنشطة التالية للمتعلم.

ويتضمن التقويم البنائى (الا أنه ليس قاصراً) على التجريب المبدئى (الاستطلاعى) للوحدات الدراسية فى الفصل، وتجميع التعليقات والآراء من المدرسين، وأيضا الاختبارات التحصيلية على نطاق واسع التى تبين كيف يتعامل التلميذ مع المادة فى صورتها الابتدائية. ويلاحظ أن الاختبارات التحصيلية المقننة لا تكون مناسبة للتقويم البنائى.

وتعتبر الاختبارات التشخيصية نوعاً من التقويم البنائى. إذ أنها تبنى بطريقة محكمة عن طريق تحليل العمل من أعلى الى أسفل (أو من أسفل الى أعلى) السلم (الهرم) التعليمى النهائى بطريقة متدرجة نظامية.

وتكون الأسئلة المتضمنة فى الاختبارات التشخيصية اما شفهية بالمقابلة أو تحريريه كأسئلة فى اختبار تحصيلى. إلا أن الأهتمام يكون موجهاً للاجابات الخاطئة وتحليلها (أكثر من الاجابات الصحيحة) لاكتشاف المهارة أو العملية أو نوع أو مستوى المشكلة التى تسبب صعوبة للتلميذ، وذلك لعمل التدريس العلاجى على أساسها وملأ الثغرات فى بناء السلم التعليمى.

وقد طبق فكرة التقويم البنائى فى عمل نموذج لعمل وحدات بنائية، حيث يستخدم التقويم البنائى بأسلوب مرحلى منظم على عينات قليلة من التلاميذ تجرب عليهم وحدة مبنية بطريقة محكمة باستخدام تحليل العمل task analysis للسلم التعليمى من المتطلبات التعليمية البسيطة الى الأعلى فى السلم التعليمى (تبع أسلوب جانييه). ويكون التجريب عدة مرات تعدل على أساسها الوحدة كل مرة للوصول الى مستوى التمكن من التعليم.

وعلى الجانب الآخر من التقويم البنائى يوجد التقويم النهائى summative evaluation الذى يقدم فى نهاية برنامج الرياضيات ليبين قيمة أو نوعية ناتج منتجه. وهو يمثل الاستخدام التقليدى لمصطلح التقويم الذى يطبق لجمع معلومات يعمل بها قرار عن استخدام البرنامج. ويستخدم طرق مختلفة للتقويم تشمل اختبارات تحصيلية مقننة لجمع عينات من سلوك التلميذ فى الرياضيات. ولايوجد خط فاصل بين التقويم البنائى والتقويم النهائى... ولايحتاج اليه. فنشاط التقويم يمكن أن يكون نهائى بمعنى أن المعلومات تستخدم لعمل قرارات عن استخدام البرنامج وفى نفس الوقت يكون بنائى بمعنى أن المعلومات تستخدم للوصول الى تحسين البرنامج.

ويمكن أعتبار أن التقويم البنائى عملية منفصلة عن عملية التقويم النهائى. واختبار التقويم البنائى يجب أن يؤخذ على أنه جزء من عملية التعلم ويجب ألا يختلط بالحكم على مقدرات التلميذ أو يستخدم كجزء

من عملية التقدير grading أما التقويم النهائى فلا يؤثر بطريقة مباشرة على عملية التدريس. ففرضه هو تقويم بوجهه مختلفة وبهدف مختلف. وقد يؤثر من جهه أو أخرى بطريقة غير مباشرة على التدريس ولكنه عملية منفصلة.

وقد كان التقويم النهائى فى الاختبارات التقليدية يعطى فكرة عامة عن تحصيل التلاميذ فى فرع ما من فروع الرياضيات، ويتجة الى قياس النواحى البسيطة للتحصيل كالمهارات الحسابية computation اكثر من قياس النواحى المختلفة للتحصيل فى المجالات المختلفة للرياضيات. إلا أن تطوير التقويم التى اضطلعت به المشروعات الرياضية (فى تطوير المناهج) اتجه الى تصميم اختبارات لها مجموعات كبيرة من المفردات items لقياس أوجه مختلفة عديدة للتحصيل فى الرياضيات. فبنيت نماذج للتقويم لوصف مستويات السلوك العقلى. وهذه النماذج لها أهميتها فى عمل الاختبارات، حيث تستخدم كأنظمة لتصنيف مفردات الاختبار وفى تقديم وسائل لاختبار المستويات العليا من التفكير مثل التحليل والتركيب بدلاً من الاقتصار على اختبار مستويات التذكر أو التعرف. وقد تأثر بناء معظم هذه النماذج بتصنيف بلوم للأهداف التربوية.

٢.٦ ــ أنواع الاختبارات:

نقدم فيما يلى بعض أمثلة من الاختبارات المختلفة. ويقع على المدرس مسئولية إختيار أى منها فى تقييم تعلم (أو تدريس) الرياضيات تبعا للهدف المنشود.

١ ــ إختبار للكتاب المفتوح: هذا الاختبار يحبذ الفهم والتطبيق واستخدام الكتاب أثناء الاختبار. وهو يعطى التلميذ السؤال ويستعين التلميذ بالكتاب فى الاجابة عليه ومن أمثلة أحد أسئلته: وضح الاصطلاحات الغير معرفة. التعريفات والبديهيات والنظريات فى تركيب رياضى فى موضوع معين بالكتاب؟

٢ـ **أختيار القراءة:** هذا الإختبار يحبذ تكوين (أكتساب) مهارات القراءة ومهارات الاستذكار وتعلم الرياضيات الذاتى (تعلم التلميذ بنفسه). وفيه يعطى التلميذ جزءاً من موضوع رياضيات غير مألوف له فى فقرة معينة ثم يطلب منه الأجابة على بعض الأسئلة.

٣ـ **أختبار عملى:** هذا الاختبار يساعد التلميذ عن طريق قيامه بالقياس، التجريب، الرسم، طى الورق، بحث الأنماط بإكتشاف خواص وعلاقات رياضية. ومن أمثلة أحد فقرات الاختبار العملى: اعمل لوحة بأبعاد معينة ثم ثبت فيها مسامير بحيث تكون المسامير مكونة لرؤوس شكل معين بمواصفات معينة ثم يطلب بعض المعلومات عن أبعاد المسامير بعضها عن بعض أو البحث عن بعض العلاقات الرياضية عن طريق القياس والتجريب.

٤ـ **إختبار التلميذ لنفسه:** وفيه يقوم التلميذ بتصحيح الاختبار بنفسه ليعرف مدى تقدمه وما يحتاج اليه. ونتيجة لذلك فالاجابات الصحيحة تعضد وتقوى، والأخطاء تصحح وتقترح مواضيع إضافية للدراسة.

٥ـ **إختبارات تحصيلية:** وهى إختبار المقال والاختبارات الموضوعية (سواء المقننة أو غير المقننة). وهى تعد لقياس تحصيل التلميذ فى المادة.

وقد يقوم المدرس بعمليات أخرى لقياس التحصيل عن طريق الملاحظات. المقابلات الفردية، التقارير والمشروعات التى يقوم بها التلميذ. وفى الواقع يوجد مواقف فى الرياضيات تستدعى استخدام اختبار المقال (الذى نألفه فى اختبارتنا) ومن أمثلتها حل المسائل اللفظية أو حل تمارين الهندسة أو الهندسة العملية. وهناك مواقف أخرى تستدعى استخدام الاختبارات الموضوعية مثل قياس استيعاب التلاميذ للمفاهيم والحقائق الرياضية وفى قدرتهم على التفكير. وعلى ذلك فالاختبارات الموضوعية لايجب أن تقتصر على قياس معرفة الحقائق

والقواعد والقوانين ولكن لقياس الفهم وطرق البرهنة والأساس الرياضى للقواعد المختلفة.

ومثال لسؤال من إختبار موضوعى:

إذا كانت (س ـ أ) (س ـ ب)= صفر فان

(١): (س ـ أ) يجب أن يكون مساويا للصفر.

(٢): (س ـ ب) يجب أن يكون مساويا للصفر.

(٣): (س ـ أ)، (س ـ ب) يجب أن يساوى كل منهما الصفر.

(٤): (س ـ أ) أو (س ـ ب) يجب أن يساوى الصفر.

(٥): إجابات أخرى.

٦ـ إختبار اتجاهات: وهى الاختبارات العادية لقياس الاتجاهات ومن أمثلة أحد فقراتها:

ـ أحب مادة لى فى المدرسة هى....

ـ أحب أن أدرس برنامج آخر فى الرياضيات مثل البرنامج الحالى.

ـ أحب حل مسائل الرياضيات طالما أصل الى الاجابة الصحيحة.

٧ـ إختبارات فى التفكير البناء: فى حل المشكلات يجب أن تقيم طريقة الحل ونوعية وجمال البرهان. ومن عناصر التفكير البناء. التخطيط، التنظيم الالهام والاستبصار ومثال لسؤال فى مثل هذه الاختبارات:

ـ مسألة ما موضوعه يطلب إجابتها، يطلب طريقة الحل، يطلب أكثر من طريقة للحل.

٨ ـ إختبارات تشخيصية: وهذه الاختبارات تعد لتكشف نوع الصعوبة (فى مهارة ـ فهم ـ عملية خاصة ـ قاعدة) ومستواها وهى مفيدة فى علاج المناهج.

وجدول (١) يبين الجزء الأول فى اختبار تشخيصى. لاحظ كيف يكون للصفوف والأعمدة صعوبات مشتركة.

النوع الأول	حل لإيجاد أ	حل لإيجاد ب	حل لإيجاد حـ	حل لإيجاد ى	الاجابات
(I)	(١): أ = ٣٠	(٢): ٣٢ = ٤ ب	(٣): ٨ حـ = ٦	(٤): ١٥ = ٨ ى	(١): أ = (٢): ب = (٣): حـ = (٤): ى =
(II)	(٥): أ/ب = ٨	(٦): ١٢ = ٢ب/٣	(٧): حـ/٣ = ١/٥	(٨): ٣ ١/٤ = ٣/٤ ى	(٥): أ = (٦): ب = (٧): حـ = (٨): ى =

جدول (١)

٩ـ إختبارات للاستعداد أو إختبارات إستكشافية : وهى إختبارات تعد لتبين استعداد التلميذ لدراسة موضوع جديد عن طريق قياس معلوماته وخبراته السابقة . وقد تتضمن هذه الاختبارات أجزاء من الموضوع الجديد ليقف المدرس على مدى تعلم التلميذ فى الموضوع الجديد . ولايختلف أعداد هذه الاختبارات عن الاختبارات التحصيلية إلا أن هذه الاختبارات تعطى قبل دراسة الموضوع والاختبار التحصيلى بعده .

والاختبار قبل دراسة الموضوع و بعده يعطى فكرة عن التعلم الذى يحدث أثناء الموضوع ، وفيما يأتى مثال لاختبار على الأسس والجذور.

(١) كم عدد الجذور التربيعية لعدد ؟

(٢) ما هو الجذر التربيعى للعدد .... لأن .... مرات .... هو....

(٣) إذا كان س = $\sqrt{ص}$ فان ... = ص

(٤)



الوتر طوله .... سم

(٥) أرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٣}$ سم .

(٦) (أ) : $\sqrt{٢}$ = ... (ب) : $\sqrt{٣}$ = ... (حـ) : $\sqrt{٥}$ = ...

(٧) (أ) : $\sqrt{\frac{أ^{٢}}{ب^{٤}}}$ = ... (ب) : $\left[\frac{٤}{٧}\right]^{٢}$ = ...

(٨) أبسط طريقة للتعبير عن $\sqrt{س^{٢} ص}$ هو ....

(٩) فى التعبير $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ الجذر هو ... والأس هو ... تسمى العلامة $\sqrt{}$ علامة ...

(١٠) س $^{\frac{٢}{٣}}$ تعنى الـ ... لجذر ... بقوة ....

(١١) (أ) : $\frac{س^{٥}}{س^{٢}}$ = ... (ب) : س$^{\frac{٣}{٤}}$ + ص$^{\frac{١}{٢}}$ = ...

(حـ) : أ$^{\frac{٣}{٤}}$ × أ$^{\frac{١}{٤}}$ = ...

(١٢) س^{٥} + س^{٥} = س $^{(...)}$

١٠ـ **إختبارات تنبؤ (أو أستعدادات):** هذه الاختبارات تنبىء باحتمال نجاح التلميذ فى برنامج معين. ومن أهم العوامل فى التنبؤ بالتحصيل الرياضى فهم الطرق الرياضية العامة، الانتباه فى الفصل، الاصالة، عوائد الدراسة، الذكاء العام، وأكفأ مثل هذه الاختبارات هى التى تجمع بين إختبار تنبؤ فى الرياضيات prognostic test واختبارات ذكاء ودرجات المدرس.

ومثل هذه الاختبارات تساعد المدرس أن يبعد التلاميذ غير المستعدين لبرنامج معين ويتقدم بالذين لديهم الاستعداد. وهذه الاختبارات أيضا تساعد فى التمرين والارشاد التربوى وتقسيم التلاميذ تبعا لقدراتهم. فأكتشاف التلاميذ ذى القدرات والاستعداد الكبير للرياضيات له أهمية فى بناء الرياضيين ومساعدتهم كأهمية اكتشاف الضعفاء أو المتوسطين. ولعمل مثل هذه الاختبارات يجب أن يكون المدرس له معرفة بالقدرات والاستعدادات والميول التى تساعد فى التقدم الدراسى. والاختبارات التى تستخدم فى التمهين والارشاد يجب أن تكون مبنية على المعرفة بالمهارات والمفاهيم ومبادىء النجاح فى المهنة المختارة. ومثال لسؤال فى اختيار تنبؤ prognostic test فى الجبر:

معطى س = $\frac{ص}{ن}$ إذا كانت ص، ن دائما متساويتين كيف تتغير س فى القيمة إذا زادت ص، ن؟

(أ) تظل كما هى (ب) تزداد

(حـ) تقل (ء) لا أستطيع القول

١١ـ إختبارات مسابقة: وهى إختبارات بين فصول أو بين مدارس أو بين مناطق تعليمية أو بين دول على مستوى محلى أو عالمى.

٢.٦ـ أمثلة لأسئلة من إختبارات موضوعية:

نقدم فيا يلى أمثلة من أسئلة: الاختيار من متعدد، الصواب

والخطأ ، الاكمال المختصر ، المقابلة ــ وقد قدمنا فى مناقشتنا السابقة أمثلة قليلة منها .

(أ) أسئلة الاختيار من متعدد : ويتكون السؤال من جزئين ، الجزء الأول وهو الجزء الموجود فيه القضية (العبارة) التى يسأل التلميذ عنها والجزء الثانى يشمل الاجابات عنها ويختار التلميذ الاجابة الصحيحة منها . وفيما يأتى بعض الأمثلة .

(١) فى △ أ ب حـ = $\overline{\text{أ ب}}^{٢} = \overline{\text{أ حـ}}^{٢} - \overline{\text{ب حـ}}^{٢}$

(أ) أ زاوية قائمة .

(ب) ب زاوية قائمة .

(حـ) أ حـ أقصر الأضلاع .

(د) أ ب أطول الأضلاع .

قيمة $\dfrac{\text{ط}\,[\,(٧,٥)^{٢} - (٦,٥)^{٢}\,] \times ٣٦}{١٧٢٨}$ تقع بين

(أ) ,٠١ ، ,١

(ب) ,١ ، ١

(حـ) ١ ، ١٠

(د) ١٠ ، ١٠٠

٣ ــ بعض القيم س ، ص كما فى الجدول :

س	١	٥	١٠	٢٠
ص	٥	١٢٥	٥٠٠	٢٠٠٠

(أ) ص $\propto$ س^{٢}

(ب) ص = ٥ س

(حـ) ص = ٥ س^{٢}

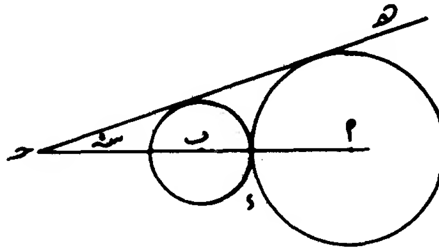
(د) ص = ٣٠ س ــ ٢٥

٤ ــ أ ب قطعة مستقيمة ، م تنصف القطعة المستقيمة ، النقطة س

نقطة فى المستوى المار بالقطعة المستقيمة بحيث أن مساحة المثلثين س أ م ، س ب م متساويتان (ولايساويان الصفر). المحل الهندسى لنقطة س هو:

(أ) المستقيم العمودى على أ ب من نقطة م.
(ب) مستقيم // أ ب.
(حـ) مستقيمان // أ ب.
(د) نقط المستوى ماعدا النقط على المستقيم أ ب.

٥ــ دائرتان مركزاهما أ، ب يتماسان فى ء. حـ هـ مماس مشترك، طول $\overline{\text{ب ء}}$ = ١سم، طول $\overline{\text{ء أ}}$ = ٢سم إذا كانت ∢ هـ حـ ء = س°.

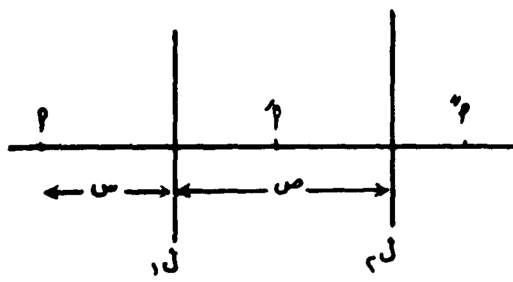


فان:

(أ) حا س = $\frac{١}{٣}$
(ب) ظا س = $\frac{١}{٣}$
(حـ) حا س = $\frac{٢}{٣}$
(د) ليس أى مما سبق صحيح

٦ــ أَ انعكاس أ فى $ل_١$ ، أً انعكاس أَ فى $ل_٢$ ، $ل_١ // ل_٢$ ، المسافة أأً هى:

(أ) ٢ ص
(ب) س + $\frac{٣}{٢}$ ص
(ح) ٢ س + ص
(د) $\frac{٣}{٢}$ س + ص



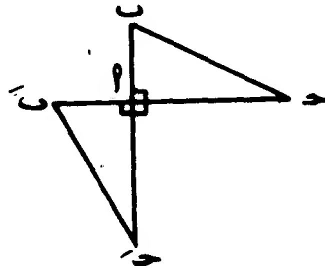
٧ــ أ بَ حـ صورة أ ب حـ تحت تحويل هندسى. هذا التحويل :

(أ) دوران ربع دوره مع عقرب الساعة حول أ.

(ب) انعكاس فى المستقيم المنصف للزاوية ب أ بَ.

(حـ) دوران حول منتصف ب بَ.

(د) انتقال فى اتجاه المتجة $\overleftarrow{\text{ب بَ}}$.



(ب) أسئلة الصواب والخطأ: وهنا يعطى التلميذ عبارة تتعلق بموضوع الاختبار ويطلب من التلميذ الحكم على صحتها أو خطئها.

أمثلة :

أى مما يأتى صحيح وأيها خطأ. ضع العلامة ✓ على التقرير الصحيح والعلامة × على التقرير الخطأ.

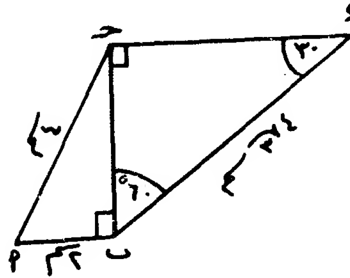
(١) (س ــ ٣) (س + ٥) = صفر $\Longleftrightarrow$ س = ٣

(٢) س^{٢} ــ ٤ س = صفر $\Longleftrightarrow$ س = ٤

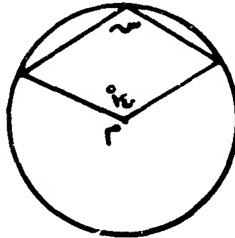
(٣) ٢ س > ٥ ص ⟺ − ٦ س < − ١٠ص

(٤) $س^2 > ص^2$ ⟺ س > ص

(حـ) أسئلة الاكمال المختصر: وهنا تكون العبارات المطلوب تكملتها بها مسافات خالية ليملأهما التلميذ. أمثلة:



(١) فى الشكل المثلثان أ ب حـ، ب حـ ى مثلثان قائمان طول حـ د ... سم والنسبة $\frac{ب ى}{أ حـ}$ هى ....



(٢) فى الشكل زاوية س هى ....

(٣) ١٧ × ١٢٠ ــ ١١٧ × ١٨ = ...

(٤) فى المثلث القائم الزاوية المربع المنشأ على الوتر يكافىء .... المربعين المنشأين على ...

(د) أسئلة المقابلة: تكون فى صورة عمودين من الألفاظ أو العبارات أو التقارير بحيث يكون لكل لفظ (أو عبارة أو تقرير) فى أحد العمودين لفظ (أو عبارة أو تقرير) واحد يكملها فى العمود

الثانى. وفى العادة لايكون هناك أساس معين فى ترتيب محتوى العمودين و يطلب من التلميذ اختبار اللفظين (العبارتين أو التقريرين) المتكاملين .

مثال

فئة الأعداد الطبيعية	(٠، ١، ٢....)
فئة الأعداد الصحيحة	(١، ٢، ٣، ٤....)
فئة الأعداد الصحيحة غير السالبة	(٠، ± ١، ± ٢، ± ٣...)

****

الباب السابع

مناقشة بعض مشكلات التربية العملية

المدرس فى الفصل

كل من جرب التدريس يعرف أنه مهنة ممتعة وشيقة وقاسية . وإذا اعتبرنا التدريس فن وعلم وخبرة ووسيلة اتصال بين أشخاص فإننا نقدر دور الفصل الدراسى فى تنمية مقومات التدريس الناجح ، فالفصل أكبر معلم فى مهنة التدريس . وكثيراً ما يبدأ المدرس بتقليد أحد أو بعض مدرسية الذى تأثر بهم ثم يشق طريقة بعد ذلك معتمداً على نفسه ودراسته وخبرته الشخصية وتفاعله مع الجو المدرسى فيبنى لنفسه طريقة خاصة مستقلة ناجحة فى التدريس . إلا أنه يجب أن ننتبه الى أن الفصل الدراسى قد يكون له تأثير معوق لنجاح المدرس فى أول سنوات عمله عندما يفشل فى معالجة المشكلات اليومية الخاصة بأنشطة التلميذ . ولذا فإننا نقدم فيما يلى بعض المقترحات بهذا الصدد تساعد المدرس المبتدىء خاصة على الإدارة السليمة فى الفصل وقد يجد الطالب فيها أيضاً ما يعنيه فى التربية العملية . ومن ثم سوف نتكلم على حفظ النظام ، التخطيط واعداد الدرس اليومى والروتين المدرسى .

١٠٧ ــ حفظ النظام :

معظم مشكلات حفظ النظام تنتج من ادارة ضعيفة للفصل أو من ضعف فى التدريس ، سواء فى المادة أو فى الطريقة . فالتلميذ الذى لايفهم ما هو المتوقع منه يكون نفسه مشكلة فى النظام . ومثل هذا التلميذ لايتوقف عن مضايقة المدرس الذى قد يتصرف تجاهه بطريقة

غير حكيمة أو أنتقامية ومن ثم تتصاعد المشكلة. ويمكن أن يتحكم المدرس فى مثل هذا الخطأ من أول العام الدراسى فيحدد الروتين فى الفصل، ليعرف التلميذ ما هو المتوقع منه وما هو المتوقع من المدرس، هذا بجانب اعتنائه بالمادة وتدريسها.

والمدرس المبتدىء قد يستفيد من أول سنة فى تدريسه فى الوقوف على القواعد الأساسية فى العلاقة بين المدرس والتلميذ لحل مشكلة النظام ويطبقها فى السنوات المتتالية بعد ذلك. أما البعض فقد لايعطى لنفسه فرصة التعليم ويسير على منهاجه كارها للتدريس شاكيا، واضعاً أسباب فشلة على التلميذ أو الإدارة المدرسية. وفي نفس الوقت نجد المدرس الذى يبدأ بداية سليمة مراعياً قوانين التعلم وطبيعة التلميذ ويبنى فى جو من الصداقة سيطرة معقولة على الفصل ويعتنى بتدرسية ومادته ويحدد الأنشطة المختلفة ودور التلميذ وإيجابياته، هذا المدرس يجد خبرة التدريس مرضية ويحاول أن يسعد بها أكثر وأكثر.

ومن ثم فإن معظم مشكلة حفظ النظام يمكن تجنبها عن طريق التخطيط الدقيق للعمليات فى الفصل بحيث تكون واضحة ومعروفة للتلميذ وتجرى بطريقة متآلفة. إلا أنه توجد أعتبارات أخرى لحفظ النظام. فحفظ النظام يمكن أن يتأتى إذا اعترف المدرس أن كل تلميذ شخص يستحق الاهتمام والاحترام.

فاهتمام المدرس بالتلميذ المشاغب قد تكون عملية صعبة ومعقدة للمدرس. إلا أنه فى بعض الحالات يمكن أن تكون مقابلة المدرس للتلميذ المشاغب خارج الفصل وإعطائه بعض المسئوليات أثر فى تعديل سلوكة أو قد يجد المدرس فى مناقشة حالة ذلك التلميذ مع مدرسين أخرين للفصل ما يعين على تمييزه وعلاجه.

والتلميذ يحب أن يجذب انتباه المدرس والطريقة المشروعة تكون خلال التفوق الدراسى والإجابة على أسئلة المدرس. إلا أنه قد يذهب

بعض التلاميذ إلى جذب انتباه المدرس بطريقة غير مقبولة ليحدث اضطراب وفوضى فى الفصل. ويمكن للمدرس أن يتجنب ذلك بإعطاء كل تلميذ جزءاً من انتباهه. وبشىء من الملاحظة الذكية للمدرس وروح الدعاية والمرح مع احتفاظه بكرامته يستطيع المدرس أن يواجه التلميذ المشاغب بشىء من الحكمة داخل الفصل ويهدىء من أنفعالة ويعطيه بعض الأنشطة المناسبة له، والتلاميذ يحبون الجو المرح وروح الدعابة للمدرس فان هذا يخفف عنهم صعوبة مايفهمونه أو يعملونه داخل الفصل بجانب أنه وسيلة لتجنب المواقف التى تثير المشاغبة بصفة عامة وذلك بشرط ألا تكون روح الدعابة والمرح بديل للتدريس الجيد ومعرفة المدرس الصحيحة لمادته. وقد يكون من المناسب فى بعض الحالات أن يقبل المدرس هزيمة طارئة عندما يشعر أن المواجهة فى الفصل معقدة للأمور. ونتيجة لتعقد الأمور فى الفصل، فقد يلجأ المدرس فى بعض الأحيان إلى إدارة المدرسة (الناظر مثلا) لحل مشكلة نظام. ولهذا فوقت الحصة أو اليوم الدراسى كله قد يكون مؤسفاً ومخجلا للمدرس. إلا أن محاولته أن يقبل ما حدث كفشل ما ثم يعمل جاداً اليوم التالى مستخدماً أساليبا جديدة غير انتقامية أو عدوانية مايجعله يعيد ثقته بنفسه وثقة التلاميذ به وبتدريسه وقوة شخصيته.

٢.٧ ـ التخطيط وإعداد الدرس اليومي:

معظم الأعمال التى يقوم بها المدرس تحتاج إلى نوع ومستوى من التخطيط، فتقسيم المقرر إلى وحدات وتحديد وقت الدراسة لكل وحدة أو موضوع يحتاج إلى نوع من التخطيط ــ وغالباً ما يأخذه المدرس المبتدىء من المدرس الأول. ويستحسن أن يكون تخطيط المقرر أو تخطيط الوحدات مرناً حتى لايتأثر بالعطلات المفاجئة أو المباريات الرياضية فى المدرسة.

والتخطيط للدروس اليومية وتفاصيلها وتتابع العمل كل يوم يقع

مسئوليته على المدرس. ومما لاشك فيه أن الدرس الذى أعد تبعا لخطة سليمة يبين ثقة المدرس بنفسه ويكسب ثقة تلاميذه به. وأى مدرس يدخل الفصل دون أن يكون فى ذهنه خطة سليمة بالأشياء التى يتوقع أن يقوم بها أو التى يقوم بها التلاميذ فهو يغامر بتضييع الوقت والجهد. وقد لايحتاج المدرس الخبير أن يكتب خطة مفصلة لكل درس. إلا أن المدرس المبتدىء يجد أن ذلك يساعده مساعدة كبيرة. فكتابة لخطة للدرس اليومى يدعم الخطة فى ذهن المدرس. ويلاحظ أن خطة الدرس اليومى يجب أن تكون مرنة لأنها قد تتطلب بعد التعديل تبعا لظروف وأحوال تظهر فجأة أثناء الدرس. وقد يكون الدرس اليومى درس تقديم لمفاهيم جديدة أو درس تدريب أو درس مراجعة أو درس اختبار وفى أى من هذه الدروس يجب أن يوضح المدرس الهدف من الدرس وكيف يحققه ويحدد تفاصيل الدرس وترتيبها مع توزيع الوقت المناسب على أجزاء الدرس المختلفة.

وعلى أى حال فمعظم الدروس تحتوى على:

(١) اختبار مبدئى (ربما أسئلة شفهية) يبين المهارات والمفاهيم الخلفية للتلميذ.

(٢) تحديد أهداف الدرس.

(٣) تحديد إطار المحتوى من المادة مع المهارات الأساسية والأفكار الرئيسية لإتقانها.

(٤) اختبار الأنشطة التعليمية الممكنة.

(٥) تحديد أسلوب (نوع) الدرس (درس معملى أو درس يعتمد على وسائل تعليمية أو درس يكتشف التلميذ فيه المفاهيم والحقائق أو درس عادى أو....) مع مراعات إثارة الدوافع ومراعاة الفروق الفردية.

(٦) قائمة بالمادة التى تستخدم.

(٧) تحديد التدريبات للتلميذ والواجب المنزلى.

(٨) الامتحانات والتقييم.

وعامة خطة الدرس يجب أن تجيب على أسئلة مثل :

(١) ما الذى سوف تدرسه ؟

(٢) لماذا يكون من المهم أن يتعلم التلميذ هذه الأفكار؟ أى ما أهمية هذه الأفكار؟

(٣) كيف تقدم الدرس ؟ أى ما هو مدخل الدرس ؟

(٤) كيف تدرس الدرس ؟ ما هى الأسئلة المرشدة التى تنوى وضعها ؟ كيف تنمى المفاهيم فى ذهن التلميذ وتساعده على اكتشاف التعميمات والقوانين ؟

(٥) ما هى المواد التعليمية التى تستخدمها ؟

(٦) ما هى الأنشطة التعليمية التى تعطيها لتساعد على الدراسة المستقلة ؟

(٧) كيف تنهى الدرس ؟

وقد تختلف خطة الدرس شكليا أو تختلف فى تفاصيلها وفى العادة تنظم بترتيب الأنشطة التى تجرى فى الدرس . وقد يكون من المساعد للمدرس المبتدىء أن تشمل الخطة توزيع زمنى . وعلى أى حال فالخطة يجب أن تكون مرنه لتراعى إجابات أو رد فعل التلاميذ كما أن المدرس يجب أن يعرف خطة الدرس بشكل كافى حتى لايحتاج الى أن يرجع اليها باستمرار اثناء الدرس .

وفيما يلى نقدم أمثلة لخطة عامة لدروس مختلفة توضح ترتيب الأنشطة مع التوزيع الزمنى ثم نقدم بشيء من التفصيل مثالين لخطة درسين فى الجبر.

١ ــ هندسة ــ موضوع المثلثات المتكافئة .

ترتيب الأنشطة	الزمن بالدقائق
ــ أسئلة للمراجعة وتصحيح التمارين السابقة	١٠
ــ مناقشة التكافؤ، معنى نظريات التكافؤ بالنسبة للمثلث.	٢٥
ــ تمارين للمراجعة.	١٠

٢ـ جبر ـ المعادلات الكسرية

ترتيب الأنشطة	الزمن بالدقائق
ـ مراجعة مختصرة لمبادىء حل المعادلات الخطية.	٥
ـ مناقشة وشرح معنى المعادلة الكسرية (التى تحتوى على كسور) وطريقة حلها، حل بعض الأمثلة .	٢٠
ـ تدريبات للتلميذ يحلها فى الفصل سواء فى كراسته (أو نادراً على السبورة) و يتفقد المدرس التلميذ . ليقف على قوة التلميذ وضعفه وفهمه لأساسيات القواعد التى يستخدمها .	١٥
ـ تمارين للواجب.	٥

٣ـ جبر ـ رسم بيانى ـ حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى بيانيا .

ترتيب الأنشطة	الزمن بالدقائق
ـ مراجعة للاصطلاحات المستخدمة، معنى المحاور، معنى نقطة الأصل، اختيار الوحدات، معنى الأحداثيات معنى ثنائى مرتب، الأشكال البيانية المختلفة للمعادلة من الدرجة الأولى، المعنى الجبرى لحل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى. هل توجد فى فئة الحل قيمة وحيدة لكل من المجهولين .	١٠
ـ مناقشة لمعنى حل معادلتين بيانيا. وكيفية إيجاد فئة الحل بيانيا. مع التعرض للحالات المختلفة لفئة الحل عندما تكون خالية، محدودة أو غير محدده، مع أمثلة محلولة	١٥
ـ تمارين للواجب وحل بعضها فى الفصل تحت إشراف المدرس.	٢٠

مثال (١) لخطة درس :

الموضوع : تقديم فئة الأعداد الصحيحة .

الهدف : أن يعرف فئة الأعداد الصحيحة وحسابها والرموز المستخدمة فى تمثيلها .

المقدمة : سنتعرف اليوم على فئة جديدة من الأعداد تسمى هذه الفئة فئة الأعداد الصحيحة ونستخدم هذه الأعداد فى الرياضيات والعلوم والصناعة وفى معظم المجالات وتسمى أيضاً الأعداد الصحيحة الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة وتشمل الصفر .

أسئلة للبحث (الأرشاد) :

ــ ما هى فئات الأعداد المختلفة التى درستها ؟

ــ ما هى العمليات التى يمكن إجراؤها على هذه الفئات ؟

ــ ما هى خواص هذه الفئات من الأعداد والعمليات عليها ؟

ــ أى العمليات غير مغلقة على هذه الفئات ؟

ــ هل يمكن إيجاد حل المعادلة س + أ = صفر بصفة عامة فى فئة الأعداد الطبيعية حيث أ عدد طبيعى .

ــ هل تستطيع أن تكتشف كيف توسع فئة الأعداد الطبيعية بحيث يمكن إجراء عملية الطرح .

تسلسل الدرس :

استخدم خط الأعداد لتمثيل الأعداد الطبيعية (أى الأعداد التى تستخدمها فى العد) . قارن بين خطة الأعداد ومقياس ترمومتر (يشتمل على درجات فوق وتحت الصفر) . وضح التناظر الأحادى بين الأعداد الطبيعية والأعداد الموجبة (قراءات الترمومتر فوق الصفر) . وضح التناظر الأحادى بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة السالبة (قراءات الترمومتر تحت الصفر) .

ــ فى أى الحالات سمعت على الأعداد السالبة ؟

ـ كيف تكون الأعداد الموجبة والسالبة مرتبطة بمسائل للطرح ؟
ـ كيف تكون الأعداد الموجبة والسالبة مرتبطة بالاتجاه ؟
ـ كيف تكون الأعداد الموجبة والسالبة مرتبطة بالكميات المضادة ؟
ـ ما هو ترتيب الأعداد على مقياس الحرارة ؟
ـ ما هى الطريقة المعقولة لمقارنة الأعداد على خطة الأعداد ؟
ـ إذا كانت أ عدد صحيح موجب ، ب عدد صحيح سالب أى من التقارير الآتية صحيح ؟

أ > ب ، أ ≠ ب ، أ ≯ ب ، أ ≮ ب

أ ≥ ب ، أ ≤ ب

ـ كيف تستطيع أن تستخدم خط الأعداد كوسيلة لجمع الأعداد الصحيحة ؟

ـ هل عملية الجمع على فئة الأعداد الصحيحة ـ إبدالية ؟ منسقة ؟

ومن إرشادات المدرس وتوجيهه لإجابات التلاميذ يتكون مفهوم الأعداد الصحيحة عند التلميذ وعلاقتها بالأعداد الأخرى التى يعرفها وكيفية إجراء عملية الجمع عليها باستخدام خطا الأعداد أو وسيلة إيضاح لمسطرة حاسبة مصممة لجمع الأعداد الصحيحة (كالتى ذكرناها فى تدريس الجبر) وكذلك خواص عملية الجمع فى فئة الأعداد الصحيحة .

التدريب والواجب المنزلى :

وتشمل تدريب على الدرس ، تقديم الدرس المقبل ، كتابة بحث لإثراء ثقافة التلميذ ، عمل وسيلة إيضاح ، مثل :

(١) وضح بعض استعمالات الأعداد الصحيحة ؟
(٢) أكتب بعض المسائل التي تحتاج الى أعداد موجبة وسالبة تمثيل الكميات الموجودة ؟

(٣) أجمع ما يأتى : $^{+}٥ + ^{+}٣$ ، $^{-}٥ + ^{-}٧$ ،

$^{+}٦ + ^{-}٤$ ، $^{-}٧ + ^{+}١٣$ ، ....

(٤) هل يمكنك أن تعمم عملية الطرح على فئة الأعداد الصحيحة ؟ فسر محاولاتك . هل تستطيع أن توجد :

$^{+}٤ - ^{+}٣$ ، $^{+}٨ - ^{+}٣$

$^{-}٨ - ^{+}٣$ ، $^{-}٨ - ^{-}٣$

خمن الإجابات أولا ثم حاول تفسيرها .

(٥) أعمل مسطرة حاسبة لجمع الأعداد الصحيحة الموجبة من ١ الى ١٠٠ .

(٦) أعمل مسطرة حاسبة لجمع الأعداد الصحيحة من $^{-}٢٠$ الى $^{+}٢٠$

(٧) من أحد كتب تاريخ الرياضيات بالمكتبة أكتب عن تاريخ الصفر .

مثال (٢) لخطة درس :

الهدف : أن يتعلم التلميذ حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول بإكمال المربع وتشجيع التلميذ على الدراسة المستقلة .

تسلسل الدرس :

(١) مراجعة تربيع مقدار ذى حدين ، تحليل المقدار المربع الكامل .

(٢) إتاحة الفرصة للتلميذ أن يتعرف على بعض المعادلات التى يصعب حلها بالتحليل .

(٣) إتاحة الفرصة للتلميذ أن يكتشف و يتدرب على تحويل المعادلة .

س^{٢} + ٢ ب س + أ = صفر الى المعادلة المكافئة

س^{٢} + ٢ بَ س + ب^{٢} = ب^{٢} ـ حـ

والمعادلة أ س^{٢} + ب س + حـ = صفر الى المعادلة المكافئة

$$\text{س}^{2} + \text{ب س} + \frac{\text{ب}^{2}}{\text{٤ أ}^{2}} = \frac{\text{ب}^{2} - \text{حـ}}{\text{٤ أ}^{2}}$$

ومن الأمثلة التى يستعين بها المدرس فى مناقشة الدرس :

حل المعادلات الآتية بالتحليل :

س^{2} — ٥ س + ٦ = صفر، س^{2} — ٥ س — ٦ = صفر

س^{2} — ٢ س + ١ = صفر، س^{2} — ٢ س — ١ = صفر

هل صعوبة تحليل المعادلة الأخيرة تعنى أن ليس لها جذور ؟

أكمل الآتى حتى يصير كل مها يأتى مربعاً كاملا .

س^{2} + ... + ٤ ، س^{2} + ١٠ س + ... ، س^{2} + س + ... ،
س^{2} + ٣س + ...

ساوى كل من المقادير السابقة بالصفر وأوجد جذرى كل معادلة ناتجة .

أقرأ الكتاب من صفحة ... الى صفحة ... لتراجع المناقشة فى الفصل ولتتعلم خطوات الحل باكمال المربع لمعادلات على الصورة .

س^{2} + ب س + حـ = صفر، أ س^{2} + ب س + حـ = صفر

حيث أ ، ب ، حـ أعداد قياسية $\neq$ صفر.

ويمكن للمدرس أن يختار بعض التدريبات من الكتاب المدرسى ويستبدل بعضها بتدريبات أخرى تمهد للدروس القادمة. كما يمكن أن يطعم المدرس الدرس والتمارين بطريقة العرب الهندسية (للخوارزمى كما بينا فى تاريخ الرياضيات) أو يطلب فى أحد التمارين من التلميذ أن يبحث فى طريقة الخوارزمى لحل بعض أمثلة من معادلة مقدار ثلاثى. أو يطلب فى أحد التمارين من التلميذ أن يكوّن بعض المسائل التى يصعب حلها عن طريق التحليل وتحتاج الى اكمال المربع .

ويجب أن يتعود المدرس أن يقيم خطة الدرس اليومى بمراجعته باستمرار ليرى :

ـ إذا كان من الممكن تحسين أي جزء منها.

ـ المادة الخاصة التي يمكن استخدامها أو التي يحتاج إليها.

ـ تنظيم الوقت بحيث يسمح باعطاء التلميذ فرصة للتدريب في الفصل، إختصار بعض الأجزاء المستفاضة، التوسع في بعض الاجزاء المختصرة.

٣.٧ـ الروتين المدرسي:

يستحسن أن يوضح المدرس منذ البداية طريقته في الأعمال المدرسية المختلفة حتى يستطيع التلميذ أن يعرف نهج المدرس وما هو متوقع من التلميذ أو من المدرس عمله. وقد يلجأ بعض المدرسين في أوائل العام الدراسي الى أعطاء التلاميذ فكرة واضحة عن المحتوى العام الذي سوف يدرسونه وأسلوبة في تدريس المواضيع المختلفة، وفي التقييم، وفي تصحيح الإجابات المنزلية، وفي تحديد أنشطة التلاميذ، ويوضح عما إذا كان سيختار بعض التلاميذ ليساعدوه في بعض الأعمال الروتينية، ففي أول الحصص يستحسن أن يجيب المدرس على أسئله مثل؟

(١) ما هو محتوى المقررـ أفرع الرياضيات المختلفة بصفة عامة؟

(٢) ما هو ارتباط المقرر ببقية البرنامج الدراسي؟

(٣) ما هي أساليب التدريس (أنواع الدروس) التي يستخدمها؟

فالتلميذ الجاد يود معرفة طريقة المدرس وأسلوبه ليكيف طريقة دراسته عليها. والتلميذ الأقل جدية يحتاج أيضا الى معرفة طريقة المدرس حتى يتجنب أي التباس. وعلى ذلك فالتلميذ يود أن يعرف: هل ستكون معاملة المدرس للفصل رسمية أم يتيح مشاركة التلاميذ؟ هل المذكرات التي يدونها التلاميذ في كراس الحصة كافية أم لا؟ هل الواجبات المنزلية تحتاج الى قراءة أخرى مكملة لما أخذه التلميذ في الدرس؟ ما هي أنواع الدروس المختلفة أي ما هي أساليب

ـتدريس المختلفة، هل سيكون هناك دروس معملية آو دروس تقدم بالوسائل السمعية والبصرية أو دروس عن طريق الاكتشاف أو دروس يقسم فيها التلاميذ الى مجاميع تحاول كل مجموعة الدراسة المستقلة بتوجيه من أحد أعضائها أو دروس يقوم فيها أحد التلاميذ بدور الموجه للمناقشة أو دروس إثراء معرفة أو دروس تبين كيف يتعلم ويدرس التلميذ أو دروس يستخدم فيها كتب ومواد علاجية، أو دروس تعلم الاكتشاف بكتابة مسائل أصيلة أو حل مسائل أو خلق نظرية أو إثبات نظرية بطريقة أصيلة، أو دروس تستخدم أساليب جديدة ككتب مبرمجة أو الكمبيوتر أم سيقتصر المدرس على أحد هذه الدروس أو بعضها.

٤ـ ما هو دور التلميذ؟

فالتلميذ يجب أن يعرف منذ البداية ما هو متوقع منه فى الفصل وخارجة. هل سيشترك التلميذ بحرية فى نمو الأفكار الجديدة؟ هل مقاطعة أو حتى إعتراض التلميذ مرحب به؟ هل ستجمع كراسات الواجب المنزلى بأنتظام؟ وتصحح؟ وتعاد؟ متى يمكن أن يسأل التلاميذ أسئلة؟ متى يتوقع التلميذ أن يجد مساعده بالنسبة لصعوبة فى الواجبـ قبل أو أثناء أو بعد الحصة التى تناقش فيها الواجب. وهل تعاون التلاميذ فى عمل الواجب مسموح به؟ أو لا يشجعه المدرس؟ بعد غياب تلميذ بعض الحصص هل يطلب من المدرس مساعدته فى توضيح بعض ما غاب عنه والذى لم يستطع تحصيله بالدراسة المستقلة؟

(٥) ما هى أساليب التقوم التى تستخدم؟

(٦) كيف تكون المراجعة؟

هل سيراجع المدرس فى أول العام الدراسى ما أخذه فى العام الماضى.

هل سيحدد المدرس حصص لمراجعة المواضيع المتكاملة عندما ينتهى من تدريسها أم هل سيختار من ضمن أسئلة تدريباته أسئلة تربط بين

الموضوع الحالى والموضوعات السابقة لكى تراجع وتربط أفكارها بعضها ببعض. هل سيساعد المدرس التلميذ فى المراجعة أو يترك على عاتق التلميذ وحده المراجعة ؟

(٧) كيف يراجع الواجب المنزلى) ؟

ومن المشوق أن نعرض أحد الطرق الشيقة التى يتبعها أحد المدرسين فى مراجعة الواجبات المنزلية، فقبل بداية الحصة أو أثناء بدايتها عندما يكون المدرس مشغول باخذ الغياب مثلا يقوم التلاميذ الذين لهم صعوبة معينة فى مسألة قابلتهم فى الواجب بوضع نمرتها على السبورة. كل تلميذ بعد ذلك ينظر الى السبورة واذا وجد نمرة أحد التمارين استطاع حلها بنفسه يقوم و يعرض حله على السبورة هذه الطريقة تساعد المدرس فى بعض أعماله وتشجع التلاميذ فى التعاون والاعتماد على النفس.

(٨) هل سيعين تلاميذ مساعدين المدرس ؟

بعض المدرسين يعين بعض التلاميذ و يعطى لهم بعض المسئوليات مثل أخذ الغياب، جمع كراسات الواجب أو إحضار بعض الوسائل من حجرة الرياضيات، أو يستقبل الزوار. فعندما يأتى زائر يقدم له المضيف الكرسى والكتاب المدرسى والمواد المختلفة و يصف له ما يدرسونه. وقد يستعين المدرس ببعض التلاميذ فى التدريس بأن يختار من له قدرة كافية على التعليم والفهم والتوضيح فى إرشاد وتوضيح الأجزاء المهمة لبعض الطلبة سواء فى مجموعات تحت أشراف المدرس فى الفصل أو أن تكون المساعدة فردية أو للفصل ككل.

وختاما فالمشكلات المذكورة ليست إلا بعضاً من المشكلات التى قد يقابلها المدرس المبتدأ أو الطالب فى التربية العملية. وتطور المدرس فى مهنته يعتمد على قدرته على الاستمرار فى حل المشكلات مهما صغرت أو كبرت حتى يستطيع أن يؤدى رسالته على الوجه الأكمل.

الملحق (١)

تقييم الكتب المدرسية فى الرياضيات الحديثة

مواصفات (معايير) الكتاب المدرس الجيد فى الرياضيات

يلعب الكتاب المدرسى فى الرياضيات دوراً رئيسياً فى تحديد موضوعات الدراسة وكيفية تدريسها بجانب دوره الرئيسى كوسيلة للتعليم فى الفصل.

ولقد ظهرت كتب فى الرياضيات الحديثة خاصة بتجربة الرياضيات الحديثة فى التعليم الثانوى، واستمرار تطور المناهج الحديثة فى الرياضيات يحتاج الى تعديل مستمر فى هذه الكتب المدرسية الموضوعة. ولذلك فاننا ندعو القارىء أو المدرس الى دراسة هذه الكتب ونقدها على أساس خطة ومعايير أو مواصفات الكتاب المدرسى الجيد فى الرياضيات. ونقدم فيا يلى قائمة تساعد على تقييم الكتاب ككل عن طريق تقييمه بالنسبة الى الموضوعات، الرياضيات، اللغة، الأساس السيكولوجى والتربوى، التدريبات التوسع والاثراء، الوسائل التعليمية، الخواص الطبيعية. ومنها يتعرف القارىء على مواصفات الكتاب المدرسى الجيد فى الرياضيات بصفة عامة.

القائمة :

١ ــ الموضوعات :

(١) الموضوعات تحقق أهداف البرنامج (أو المقرر).

(٢) ترتيب الموضوعات منطقى (فمثلا البداية بالتفاضل أو التكامل. بالمتجهات أو الديناميكا).

(٣) ترتيب الموضوعات يسير بحيث يبنى على موضوعات فى برنامج سابق ويمهد لموضوعات جديدة فى البرامج التالية.

(٤) ترتيب الموضوعات حسب السهولة.

(٥) يوجد موضوعات مختصرة وغير كافية وتحتاج الى تكملة (أو أجزاء من موضوعات) ــ أعط أمثلة.

(٦) توجد موضوعات مستفيضة وتحتاج الى حذف أجزاء منها (أو أجزاء من موضوعات). أعط أمثلة.

(٧) توجد موضوعات معقدة أو صعبة وتحتاج الى تبسيط ــ أعط أمثلة.
(٨) الموضوعات فى توافق وتكامل مع المنهج ككل.

٢ ــ الرياضيات:

(١) الرياضيات سليمة وصحيحة.
(٢) القالب الرياضى لكل موضوع واضح.
(٣) المستوى الرياضى مناسب للبرنامج.
(٤) التقارير والتعريفات والقوانين مكتوبة بوضوح وعناية.
(٥) التركيز على النقط الهامة باظهارها بوضوح حتى عن طريق وضع خطوط تحتها.
(٦) يوجد خلاصة عند نهاية كل باب تجمع القواعد والصيغ المختلفة.
(٧) استخدام الرموز سليم ومعقول ودقيق وغير متعب.
(٨) الجداول والأشكال سليمة ودقيقة.

٣ ــ اللغة:

(١) الكتاب يمكن قراءته وتفهمه.
(٢) التجريد والرموز المستخدمة ذات معنى.
(٣) اللغة مشوقة وتثير التفكير.
(٤) التعريفات والتفسيرات تستخدم الاصطلاحات التى يتوقع أن يفهمها التلميذ.

٤ ــ الأساس السيكلوجي والتربوى.

(١) المادة موضوعة لتخلق الميول والدوافع للتعلم.
(٢) المادة موضوعة بحيث تناسب التلاميذ باختلاف مستوياتهم وقدراتهم.
(٣) الطرق المستخدمة فى العرض وفى تسلسل الموضوعات مبنية على أساس سيكلوجية التعلم.
(٤) المفاهيم المختلفة موضوعة بحيث تعطى فرصة للتمليذ لاكتشاف الأفكار عن طريق للتفكير البناء والخلاق، حل المشكلات، التجريب، التحليل، التعميم.
(٥) يحتوى الكتاب على اختبارات للتلميذ وللمدرس لقياس التحصيل.

٥ ــ التدريبات :

(١) المسائل (المشكلات) متدرجة فى الصعوبة .

(٢) يوجد تنوع فى المسائل وعددها كافى .

(٣) المشكلات المحلولة كافية ومفهومه .

(٤) المشكلات تحتوى مشاكل تثير التفكير الخلاق والبناء .

(٥) المشكلات تعتمد على المعلومات التى سبق شرحها .

(٦) بعض المشكلات موضوعة لتقديم وإكتشاف المعلومات المقبلة .

(٧) حل المشكلات يساعد على تكامل استخدام المعلومات وطرق التفكير فى نقل التعلم الى أحوال أخرى .

(٨) المشكلات تساعد على حل المشكلات بصفة عامة .

(٩) المشكلات توضح دلالة التطبيقات فى الرياضيات وخارجها .

(١٠) بعض المشكلات تتطلب تعميم ، أو تعضد مفاهيم أو تكسب مهارة .

(١١) التدريبات تحتوى على أسئلة مراجعة ومواد علاجية وتمارين لإكتساب المهارات .

٦ ــ التوسع والإثراء :

(١) هل يوجد اقتراحات للدراسة المستقلة .

(٢) هل يعطى الكتاب مراجع يطلب من التلميذ الرجوع اليها لتوسيع معلوماته فى ناحية معينة .

(٣) هل يقترح الكتاب بعض موضوعات الدراسة ، للبحث ، للتجريب .

(٤) هل يتضمن الكتاب موضوعات عامة ليست فى المقرر لاثراء معلومات التلميذ العامة .

٧ ــ الوسائل التعليمية :

(١) هل يوجد للكتاب دليل للمعلم .

(٢) هل يوجد إجابات لبعض المسائل أو إرشادات للحل .

(٣) هل يحتوى الكتاب اختبارات تحصيلية .

(٤) هل للكتاب دليل يوضح كيفية استعماله أو دراسته أو كتاب مصاحب للمعمل أو كتاب مدرسى مبرمج .

(٥) هل يشير الكتاب الى بعض الوسائل التعليمية .

٨ـ الخواص الطبيعية:

(١) كتابة الصفحة جذابة ومريحة للعين.

(٢) التنظيم، العناوين، ووضع المادة مناسب.

(٣) استخدام الصور الفوتوغرافية للتوضيح.

(٤) استخدام الصور الملونة.

(٥) حجم الكتاب مناسب.

ملحق (٢)

م.٢: فئات بديهيات للهندسة الاقليدية

نقدم فيما يلى تعريفات وبديهيات الهندسة الاقليدية التى وضعها اقليدس، والتى وضعها هيلبرت، ووضعها بيرخوف للنظم البديهية الحديثة للهندسة الاقليدية.

م.٢.١: تعريفات وبديهيات اقليدس (الأصلية) للهندسة الاقليدية: *

نقدم هنا التعريفات والبديهيات (المسلمات والبديهيات) الأصلية للهندسة الاقليدية مع العشرة النظريات الأولى لاقليدس.

أولا: التعريفات

(١) النقط هى التى لا جزأ لها.

(٢) الخط Line هو طول بدون عرض.

(٣) نهايات Extremities المستقيم نقط.

(٤) الخط المستقيم هو خط يقع ممهدا بنقط ه.

(٥) السطح هو ما يكون له طول وعرض فقط

(٦) نهايات السطح مستقيمات.

(٧) السطح المستوى هو سطح يقع ممهداً بمستقيمات عليه.

(٨) الزاوية المستوية plane angle هى ميل خطين من أحدهما إلى الآخر فى مستوى يقابل أحدهما مع الآخر ولا يقعا فى خط مستقيم.

* وهى مترجمة حرفيا من: T. Heath: «The thirteen books of Euchd's Elements» عن A. Tuller

ـ أنظر المراجع للطبعة الثالثة.

(٩) عندما يكون الخطان المحتويان للزاوية على استقامة واحدة فاننا نسمى الزاوية زاوية مستقيمة Rectilinear .

(١٠) عندما يعمل خط مستقيم على مستقيم زاويتين متجاورتين متساويتين، فان كل منهما زاوية قائمة، ويسمى الخط المستقيم الأول عمودى على الثانى.

(١١) الزاوية المنفرجة هى زاوية أكبر من زاوية قائمة.

(١٢) الزاوية الحادة هى زاوية أقل من زاوية قائمة.

(١٣) الحدود Boundary هو نهاية Extremity أى شىء.

(١٤) الشكل Figure هو ما يكون محتوى (محدود) بأى حدود أو حدودات boundaries .

(١٥) الدائرة هى شكل مستوى محتوى (محدود) بخط واحد، وبحيث تكون كل الخطوط المستقيمة التى تقطعه falling upon it من نقطة إلى تلك التى على الشكل متساوية.

(١٦) وتسمى النقطة مركز الدائرة.

(١٧) قطر الدائرة هو أى خط مستقيم مرسوم ماراً بالمركز وينتهى فى الاتجاهين بمحيط الدائرة، وهذا المستقيم ينصف الدائرة.

(١٨) نصف الدائرة هو شكل محتوى (محدود) بالقطر والمحيط المقطوع به. ومركز الدائرة هو نفسه منصف الدائرة.

(١٩) الأشكال المضلعة هى التى تكون محتواه بخطوط مستقيمة، الأشكال المثلثة Trilateral هى المحتواه بثلاثة، الأشكال الرباعية Quadrilateral هى المحتواه بأربعة، والأشكال المتعددة Multilateral هى المحتواه بأكثر من أربعة مستقيمات.

(٢٠) من الأشكال المثلثة: مثلث متساوى الأضلاع وهو ما يكون أضلاعه الثلاث متساوية، المثلث المتساوى الأضلاع هو ما يكون له ضلعين متساويين، المثلث مختلف الأضلاع Scalene هو ما يكون أضلاعه غير متساوية.

(٢١) بالاضافة للأشكال المثلثة، المثلث القائم الزاوية وهو ما يكون أحد زواياه زاوية قائمة، المثلث المنفرج الزاوية وهو ما يكون له زاوية منفرجة، المثلث الحاد الزوايا وهو ما يكون كل زواياه حادة.

(٢٢) من الأشكال الرباعية: المربع وهو ما يكون متساوى الأضلاع وزواياه قوائم، المستطيل وهو ما يكون زواياه قوائم ولكن غير متساوى

الأضلاع، المعين وهو ما يكون متساوى الأضلاع وزواياه غير قوائم، شبه المعين (متوازى الأضلاع) Rhomboid وهو ما يكون كل ضلعين متقابلين وكل زوايتين متقابلتين فيه يساوى أحدهما الآخر ولكنه ليس متساوى الأضلاع ولا زواياه قوائم. ولنوع الأشكال الرباعية الأخرى نسميها منحرفات Traperia.

(٢٣) المستقيمات المتوازية هى مستقيمات لو كانت فى مستوى وامتدت من جهتيها مهما امتدت لا نهائيا Indefinitely لا يقابل أحدهما الآخر.

ثانيا: المسلمات Postulates

(١) لرسم to draw خط مستقيم من أى نقطة إلى أى نقطة.

(٢) لمد to produce قطعة مستقيمة باستمرار continuously a finite straight line فى خط مستقيم.

(٣) لوصف to describe الدائرة بمركز ومسافة.

(٤) أن that كل الزاوية القائمة تكون متساوية بعضها مع بعض.

(٥) أن that، إذا قطع مستقيم مستقيمين وجعل الزاويتين الداخليتين على نفس الجانب أقل من قائمتين فانه إذا امتدا المستقيمان لا نهائيا indefinitely يتقابلان على الجانب التى تكون فيه الزاويتين أقل من زاويتين قائمتين.

ثالثا: البديهيات The common notions

(١) الأشياء التى تكون مساوية لنفس الشيء تكون متساوية.

(٢) إذا أضيفت متساويات على متساويات فالكل wholes متساوى.

(٣) إذا طرحت متساويات من متساويات فالبواقى remainders تتساوى.

(٤) الأشياء التى تنطبق على بعضها تتساوى.

(٥) الكل أكبر من الجزء.

رابعاً: النظريات العشرة الأولى فى الكتاب I (لاقليدس)

(١) على قطعة مستقيمة ينشأ construct مثلث متساوى الأضلاع.

(٢) لوضع عند نقطة معطاه خط مستقيم يساوى خط مستقيم معلوم.

(٣) معطى خطان مستقيمان غير متساويين، لقطع to cut off من المستقيم الأكبر المساوى للأقل.

(٤) إذا تساوى ضلعين وزاوية محصورة فى مثلث نظيرهم فى مثلث آخر فان القاعدة فى المثلث الأول تساوى القاعدة فى المثلث الثانى و يتساوى المثلثين والزوايا المتبقية للمثلثين تتساوى.

(٥) فى المثلثات المتساوية الساقين تتساوى زاويتى القاعدة، إذا أمتد المستقيمان المتساويان فالزاويتين تحت القاعدة تكونان متساوية.

(٦) إذا تساوت زاويتان فى مثلث فان الضلعين عند الزاويتين يكونان متساويين.

(٧) معطى خطين مستقيمين منشأين على خط مستقيم (من نهايتيه) وعلى نفس الجهة مستقيمان آخران يتقابلان فى نقطة أخرى ويساويان الاثنين السابقين على الترتيب، أى لأى مستقيم يكون له نفس النقطة النهائية معه.

ملحوظة: لاحظ أنه يقصد بالمستقيم القطعة المستقيمة التى لها نقطتين نهائيتين.

(٨) إذا تساوى ضلعان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر وتساوت القاعدتين أيضا فان زواياهما تكون متساوية (الزوايا التى تكون محتوية بالمستقيمات المتساوية).

(٩) لتنصيف to bisect زاوية مستقيمة معطاه.

(١٠) لتنصيف خط مستقيم محدود finite معطى.

م ٢.٢ : بديهيات هيلبرت للهندسة الاقليدية المستوية ★

أولا : بديهيات الوقوع أو الحدوث Axioms of connections

(١) خلال أى نقطتين مختلفتين أ، ب يوجد دائما خط م.

(٢) خلال أى نقطتين مختلفتين لا يوجد أكثر من خط م.

(٣) على أى خط يوجد على الأقل نقطتين مختلفتين. يوجد على الأقل ثلاثة نقط ليست على خط واحد.

(٤) خلال ثلاثة نقط ليست على خط واحد يوجد مستوى واحد فقط.

ثانيا : بديهيات الترتيب Axioms of order

(١) إذا وقعت النقطة ب بين النقطتين أ، حـ فان أ، ب حـ ثلاثة نقط مختلفة على نفس الخط، ب بين حـ، أ.

(٢) لأى نقطتين مختلفتين أ، حـ يوجد على الأقل نقطة ب على الخط أحـ بحيث تكون حـ بين أ، ب.

★ مترجم من : D. Hilbert, Grundlagen der Geometric (1962)

عن A. Tuller ـــ أنظر المرجع الخاصة بالطبعة الثالثة.

(٣) إذا كانت أ، ب، حـ ثلاثة نقط مختلفة على نفس الخط، فان أحد هذه النقط فقط تكون بين النقطتين الأخريين.

تعريف: نعنى بالقطعة (المستقيمة) Segment أب فئة كل النقط التى بين أ، ب. النقطتان أ، ب تسميان نقطتان نهائيتان end points للقطعة. القطعة أب هى نفسها القطعة ب أ.

(٤) بديهية باش: دع أ، ب، حـ ثلاثة نقط ليست على خط واحد، ودع م مستقيم فى مستوى أ، ب، حـ لايمر بأى من أ، ب، حـ. إذا كان م يمر بنقطة من نقط القطعة أب فانه سوف يمر بنقطة للقطعة أحـ أو بنقطة للقطعة ب حـ.

تعريف: نعنى بالشعاع أب فئة النقط التى تتكون من النقط التى بين أ، ب والنقطة ب نفسها والنقط حـ بحيث أن ب بين أ، حـ. نقول أن الشعاع أب يبدأ emanate من نقطة أ. نقطة أ على مستقيم معلوم م، تقسم م إلى شعاعين بحيث أن نقطتين تكونان على نفس الشعاع إذا وإذا فقط لم تكن أ بينهما.

تعريف: إذا كانت أ، ب، حـ ثلاثة نقط ليست على خط واحد. فان نظام الثلاثة قطع أب، ب حـ، حـ أ مع نقطها النهائية تسمى المثلث أ ب حـ. تسمى الثلاثة قطع أضلاع المثلث، وتسمى الثلاثة نقط رؤوس المثلث.

ثالثا: بديهيات التطابق

(١) إذا كانت أ، ب نقطتين مختلفتين على الخط م. إذا كانت أَ نقطة على الخط مَ (ليس بالضرورة مختلف عن م)، فانه يوجد نقطة ونقطة واحدة فقط، ت كل شعاع مَ يبدأ من أَ بحيث تطابق (≅) القطعة أَبَ القطعة أب.

(٢) إذا تطابقت كل من قطعتين لقطعة ثالثة فان كل منهما تطابق الأخرى.

(٣) إذا كانت النقطة حـ بين أو ب والنقطة حـَ بين أَ، بَ وكانت القطعة أحـ ≅ القطعة أَحـَ، والقطعة حـ ب ≅ القطة حـَ بَ فان القطعة أب ≅ القطعة أَ بَ.

تعريف: نعنى بالزاوية نقطة (تسمى رأس الزاوية) وشعاعين (يسميان ضلعى الزاوية) يبدآن من النقطة. إذا كانت النقطة (رأس الزاوية) أ وإذا كانت ب، حـ أى نقطتين غير أ واقعين على ضلعى الزاوية فاننا نتكلم عن الزاوية ب أ حـ أو حـ أ ب أو ببساطة أ.

(٤) إذا كانت ب أ حـ زاوية لا يقع ضلعاها على خط واحد، وإذا كان فى نفس المستوى معطى أَبَ شعاع يبدأ من أَ فانه يوجد شعاع واحد فقط أَحَـ على نفس الجانب للمستقيم أَبَ بحيث أن ∡بَ أَ حَـ ≅ ∡ب أ حـ.

باختصار زاوية معلومة فى مستوى معلوم ممكن أن تنشأ laid off على جانب معلوم لشعاع معلوم بطريقة وطريقة واحدة. كل زاوية تطابق نفسها.

تعريف: إذا كان أ ب حـ مثلث فان الزوايا الثلاث ب أ حـ، حـ ب أ، أ حـ ب تسمى زوايا المثلث. تسمى الزاوية ب أ حـ محصورة بين الضلعين أ ب، أ حـ للمثلث.

(٥) إذا كان ضلعان وزاوية محصورة لمثلث تطابق على الترتيب ضلعين وزاوية محصورة لمثلث آخر، فان كل الزوايا الباقية للمثلث الأول تطابق الزوايا المناظرة للمثلث الثانى.

رابعا: بديهية التوازى (لمستوى)

(١) «بديهية ــ مسلمة ــ بلاى فير». من نقطة أ لا تقع على خط م يمر على الأكثر خط لا يتقاطع مع م.

خامسا: بديهيات الاستمرار Continiuty

(١) «بديهية القياس measure أو بديهية أرشميدس». إذا كان أ ب، حـ د أى قطعتين اختياريتين، فانه يوجد عدد ن بحيث أنه إذا سارت (أنشأت laid off) ن من المرات على الشعاع أ ب مبتدأة من أ فانها تصل إلى النقطة هـ بحيث أن ن حـ د ــ أ هـ وبحيث أن ب بين أ، هـ

(٢) «بديهية الاكمال الخطى Linear completeness». نظام النقط على خط مستقيم مع علاقتى الترتيب والتطابق لا يمكن أن يمتد بحيث أن العلاقات الموجودة بين عناصرها والخواص الأولية للترتيب الخطى والتطابق الناتجة من البديهيات الثلاثة الأولى للوقوع والبديهية الأولى على الاستمرار تظل سارية valid.

م. ٣.٢: بديهيات بيرخوف (١٨٨٤–١٩٤٤) للهندسة المستوية *

عناصر وعلاقات غير معرفة (أولية): (أ) نقط أ، ب... (ب) فئات من النقط تسمى خطوط م، ن، ... (حـ) المسافة بين نقطتين ف (أ، ب) عدد حقيقى غير سالب بحيث أن ف(أ، ب)= ف(ب، أ)، (ى) زاوية تتكون من ثلاثة نقط مرتبة أ، و، ب، (أ≠و، ب≠و): ∢أوب عدد حقيقى (مقياس ٢ ط) نقطة و تسمى رأس الزاوية.

بديهية (١): بديهية قياس الخط (المستقيم) Postulate of line measure: النقط أ، ب، ... لمستقيم يمكن ان تكون فى تناظر أحادى مع الأعداد الحقيقية س بحيث أن |سب – سأ| = ف(أ، ب) لكل نقطتين أ، ب.

تعريفات: النقطة ب تكون بين أ، حـ (أ≠حـ) إذا كانت ف(أ، ب) + ف(ب، حـ) = ف(أ، حـ). النقطتان أ، حـ مع كل النقط ب التى تكون بين أ، حـ تكون القطعة أحـ. نصف المستقيم (الخط) مَ مع النقطة النهائية و يعرف بنقطتين و، أ على الخط م(أ≠و) كفئة كل النقط ألمستقيم م بحيث أن و لاتكون بين أ، أَ. إذا كانت أ، ب، حـ ثلاثة نقط مختلفة فإن القطع الثلاثة أب، ب حـ، حـأ تكون المثلث أب حـ بالأضلاع أب، ب حـ، حـأ والرؤوس أ، ب، حـ. إذا كانت أ، ب، حـ على نفس الخط فإننا نقول أن △ أب حـ غير متكون degenerate.

بديهية (٢): بديهية نقط–خط Point-line postulate: خط واحد وواحد فقط يحتوى نقطتين معلومتين ق، ك (ق ≠ ك) إذا لم يكن لمستقيمين مختلفين نقطة مشتركة يسميان متوازيان. المستقيم غالبا ما يعتبر موازيا لنفسه.

بديهية (٣): بديهية قياس الزاوية: أنصاف المستقيمات م، ن، ... من أى نقطة و يمكن أن توضع فى تناظر أحادى مع الأعداد الحقيقية ∝ (مقياس ٢ ط) بحيث أنه إذا كانت أ≠و، ب≠و نقطتين من نقط المستقيمين (الخطين) م، ن على الترتيب فان الفرق أن – أم هو ∢ أوب.

* وهى مترجمة حرفيا من ملحق من: G.P. Birkhoff: « A set of postulates for plane geometry » عن A. STuller – أنظر مراجع الطبعة الثالثة.

تعريفات: نصفا المستقيمين م، ن من نقطة و يكوِّنان زاوية مستقيمة إذا كان ∡ م و ن = ط. نصفا المستقيمين م، ن من و تكوِّن زاوية قائمة إذا كان ∡ م و ن = ± ط/٢، في أي حالة تقول أن م عمودي على ن.

بديهية (٤): بديهية التشابه Similarity : للمثلثين أ ب حـ، أَ بَ حـَ والتشابت λ(≠) ، إذا كان ف(أَ، بَ)= λ(ف(أ، ب)، ف(أَ، بَ)= λ(ف(أ، ب)

وأيضا ∡ بَ أَ حـَ = ± ∡ ب أ حـ فإنه أيضا ف (بَ، حـَ) = λ(ف(ب، حـ)، ∡ حـَ بَ أَ = ± ∡ حـ ب أ، أَ حـَ بَ = ± ∡ أ حـ ب.

تعريفات: أي شكلين هندسين يكونان متشابهين إذا وجد تناظر أحادي بين نقط الشكلين بحيث تكون المسافات المناظرة متناسبة والزوايا المناظرة إما متساوية أو سالبة لكل منها. أي شكلين هندسين متشابهين يكونان متطابقين إذا كانت λ=١.

(تم بحمــد الله)

المراجع

اولا: مراجع فى تدريس الرياضيات:

١ ــ باللغة العربية:

(١) الدكتور أحمد أبو العباس: «الرياضيات» أهدافها وطرق تدريسها. دار المعارف سنة ١٩٦٣.

(٢) الدكتور يحيى هندام: «تدريس الرياضيات» الأنجلو سنة ١٩٥٧.

(٣) «اتجاهات حديثة فى تدريس الرياضيات» الجزء الأول ــ اليونسكو مترجم. الهيئة المصرية العامة للكتاب سنة ١٩٦٤.

(٤) الدكتور محمود شوق وآخرون: «أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة». دار المعارف سنة ١٩٧٠.

(٥) الدكتور أحمد أبو العباس. وآخرون: «الوسائل التعليمية فى العلوم الرياضية». دار المعارف سنة ١٩٥٨.

(٦) الدكتورة نظلة حسن أحمد خضر: «دراسة تحليلية لنمو المفاهيم الرياضية». صحيفة التربية، العدد الأول والثانى سنة ١٩٧١.

(٧) «تطوير تدريس الرياضيات» صحيفة التربية. العدد الرابع سنة ١٩٦٩.

(٨) الدكتور محمود شوق: «تدريس الرياضيات». مذكرة غير منشورة، كلية التربية جامعة عين شمس.

(٩) عزت اسحق: ملخص رسالة دكتوراه على تدريس العمليات الأربعة لمحمد حسين على ــ كلية التربية جامعة عين شمس.

٢ ــ باللغة الانجليزية:

(1) D. Alleston: "The Teaching of Elementaiy Mathematics" G. Bell & Sons LTD 1962.

(2) Butler & Wren: "The Teaching of Secondary Mathematics". McGraw-Hill International Student Edition, 4th edition 1965.

(3) H. Cayton and D. Straker: "A natural Approach to Mathematics". Part 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pergamon Press 1968.

(4) Z. Dienes "Building up Mathematics" New York Humanities Press 1960.
(5) L. Félix "Modern, Mathematics and the Teacher" Cambridge University Press 1966.
(6) T.J. Flecher: "Some Lessons in Modern Mathematics" A handbook on the Teaching of Modern Mathematics by the members of A.T.M. Cambridge University Press 1965.
(7) A.E. Howard (etal): "Teaching Mathematics". Longmans 1968.
(8) Incorporated Association of Assistant Masters in Secondary Mathematics: "The Teaching of Mathematics". Cambridge University Press 1957.
(9) D.A. Johnson and G.R. Rising: "Guildines for Teaching Mathematics". Wadsworth 1967.
(10) London, Encyclopoedia Britanica Ltd: "The Teaching of Elementary Mathematics". Advisory Guide for Parents. The Gresham Press, Unwin Brother Ltd 1964.
(11) L.J. May: "Teaching Mathematics in the Elementary School". The Free Press 1970.
(12) G. Polya: "Mathematical Discovery". Vol. I, II. John Wiley, 1965.
(13) G. Polya: "Mathematics and Plausible Inferences". Vol. I, II. Princeton 1954.
(14) G. Polya: "Teaching and Learning Teaching". American Mathematical Monthly LXX, 6 (June-July), 1963. pp. 605-619.
(15) Servais and Varga (ed): "Teaching School Mathematics". Penguin Books UNESCO, 1970.
(16) S.M.P. (School Mathematics Progect), Books No. 1, 2, 3, 4, 5. Cambridge University Press 1966.
(17) S.M.S.G. (School Mathematics Sudy Group. Universiy of Illinois. Urbana Illinois) Books No. 1, 2, 3, 4, 5.
(18) M. Sobel: "Teaching General Mathematics". Prentice Hall 1967.
(19) UICSM Mathematics Project reports-University, of Illinois. Urbana Illinois.
(20) A.T.M. (The Bulletin of the Asaociation of Teachers of Mathematics): "Mathematics Teaching". Special Issue: "Aids in the Teaching of Mathematics". number 24, autumn 1963.
(21) A.T.M.: "The Development of Mathematical Activity in Children; The Place of the Problem in this development". A report prepared for the sub-committee on Mathematical instruction of the British National Committee For Mathematics by the research and development Panel of the Association of Teachers of Mathematics, November 1966.
(22) Journal of Japan Society of Mathematical Education: "Reports of Mathematical Education". Vol. LIII, 1971, Special Issue.

ثانيا: مراجع فى تاريخ الرياضيات:

١ ــ باللغة العربية:

الكتب التى أوردناها فى الباب الثانى.

٢ ــ باللغة الانجليزية:

(1) R. Ball: "A short History of Mathematics". Dover 1948.

(2) E. Bell: "The Development of Mathematics". McGrow-Hill 1945.

(3) S. Bochner: "The role of Mathematics in the rise of Science". Princeton 1966.

(4) R. Courant; and H. Robbins: "What is Mathematics". Oxford University Press, 1941.

(5) H. Eves: "Introduction to the History of Mathematics". Holt Rinehart and Winston 1964.

(6) A. Howard, etal: "Teaching Mathematics". (Vol. 1, 2) Longmans 1965.

(7) D. Smith: "History of Mathematics". (Vol. 1, 2), Dover 1951.

(8) D. Struck: "A concise History of Mathematics". Dover 1967.

(9) Encylopedia Britanica, Inc. William Benton 17-1968.

(10) Life Science Library: "Mathematics". by D. Bergamini and the Editors of Life Time-life International (Nederland) N.V., 1965.

ثالثا: مراجع فى أساسيات الرياضيات:

١ ــ باللغة العربية:

(١) دكتور سعد حسنين وآخرون: «مدخل فى الرياضيات الحديثة». الجزء الأول والثانى. دار المعارف سنة ١٩٧٠.

(٢) الدكتورة نظلة حسن أحمد خضر: «قواعد أو أصول الهندسة ــ هندسة المسلمات». مذكرة غير منشورة. كلية التربية جامعة عين شمس.

(٣) الدكتورة نظلة حسن أحمد خضر: «مذكرات فى الهندسة الإسقاطية وهندسة التحويلات». مذكرة غير منشورة. كلية التربية ــ جامعة عين شمس.

٢ ــ باللغة الانجليزية:

(1) R. Courant and H. Robbin: "What is Mathematics". Oxford University Press, 1948.

(2) G. Choquet: "What is Modern Mathematics". Educational Explorer Reading 1963.

(3) D. Geodick: "Foundations of Mathematics". Harper 1959.

(4) E. Golos: "Foundations of Euclidean and non Enclidean Geometry". Holt-Rinhart and Winston, 1968.
(5) S. Gupta: "Fundamental Real Analysis". Vikas Publications, 1970.
(6) A. Oackley: "Principles of Mathematics". McGraw-Hill, 1955.
(7) H. Royden: "Real Analysis". The Macmillan Company 1968.
(8) J. Singh: "Mathematical Ideas". The Scientific Book Guild, London, 1959.
(9) M. Ward and C.F. Hardgrove: "Modern Mathematics". Addison-Wesley, 1964.
(10) M. Vygodsky: "Mathematical Handbook". Mir Publishers, 1972.

رابعا: مراجع خاصة بالطبقة الثانية:

١ــ باللغة العربية:

(١) عبد الرحمن بصيلة: «مقدمة الى علوم الكمبيوتر». الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر ١٩٧١.
(٢) السيد محمد السيد: «المبادىء الأساسية فى الحاسبات الالكترونية» دار المعارف ١٩٧٦.
(٣) الدكتورة/ نظلة حسن أحمد خضر: «دور الطريقة البديهية في الرياضيات الحديثة والأحدث والتضمين التربوى لها»: صحيفة التربية ــ العدد الأول ١٩٧٧.
(٤) الدكتورة/ نظلة حسن أحمد خضر: «دراسات تربوية رائدة فى الرياضيات» عالم الكتب ١٩٨٤.

٢ــ باللغة الانجليزية:

(1) D.D. Benice: "Mathematics, Ideas and Applications" Academic Press 1978.
(2) R.T. Heimer & C.R. Trueblood: "Strategies for Teaching Children Mathematics". Addison Wisely 1977.
(3) H. Lewis: "Geometry. Acontemporary course". D. Van Nostrand Comp. 1964.
(4) E. Moise & F. Downs: "Geomtry" Addison Wisely 1964.
(5) T.L. Saaty: "The Marvelons Mosaic of Mathematics". IEEE Student Journal, May 1965 pp 3-13.
(6) A. Tuller: "Amodern Introduction to Geometries". D. Van Nostrand 1976.
(7) "D' Aarcy Thampson": By J.T. Bonner, Princeton Univ.
(8) Life Science Library: Mathematics". 1965.